

(I - 1) 塑性解析におけるLP計算の縮約化

防衛大学校土木工学科 正会員 ○香月 智、石川信隆、伊藤一雄

1. 緒 言

線形計画法を用いた骨組構造の塑性解析¹⁾は、直接数値計画法を用いるため、簡潔な計算手順で効率的であるが、構造が大きくなると非常に大きなマトリクス計算を行うため記憶容量や計算効率上の難点がある。このため、Livesleyは縮約化した塑性解析手法 (Compact Procedure)²⁾を提案し、これを用いてトラス構造や、はり構造の塑性解析が可能であることを示した。しかし、この方法は曲げと軸力等の複合内力の相互作用を考慮した降伏条件式に対する塑性解析に適用することはできなかった。そこで本研究は、複合内力の降伏条件式にも適用可能な新しい縮約化した塑性解析法を提案するものである。

2. 従来の線形計画法による塑性解析の基本式

図-1のような線形化された降伏関数を用いた骨組構造物の塑性解析における下界定理 (Static Approach) の基本式は、次の線形計画問題として表される¹⁾。

Given : C^T, F, N^T, R

Find : Q, α

Objective: $\alpha \rightarrow \text{maximum}$

Subject to: $C^T Q - \alpha F = 0$

$N^T Q \leq R$

$\alpha \geq 0$

$-\infty \leq Q \leq \infty$ (1g)

ここで、 C^T : 釣合マトリクス、 F : 節点外力ベクトル、 N^T : 降伏条件式の係数マトリクス、 R : 塑性容量ベクトル、 Q : 要素内力ベクトル、 α : 荷重係数であり、式(1d)は構造物の力の釣合条件を、式(1e)は断面の降伏条件を表す。

3. 提案手法の基本式および計算手順

提案する手法は、式(1)を原問題として、全降伏条件式の中から、逐次にアクティブな降伏条件式を選別して、段階的に荷重係数の最大化を図り、最終的に崩壊荷重係数を得るものである。ある段階で分けられた式(1e)のアクティブな降伏条件式 (等号条件) と、非アクティブな降伏条件式 (不等号条件) をそれぞれ次のように表す。

$$N_A^T Q = R_A \quad (2)$$

$$N_I^T Q \leq R_I \quad (3)$$

ただし、添字 A, I は、それぞれアクティブ、非アクティブな降伏条件式に関する係数マトリクスを表す。さて、式(1d)と式(2)の連立解集合の中で「座標原点 ($Q = 0$) からの距離が最も小さくなる点における解」は、係数行ベクトルの一次結合によって与えられる。すなわち、

$$Q = C\beta_C + N_A\beta_N \quad (4)$$

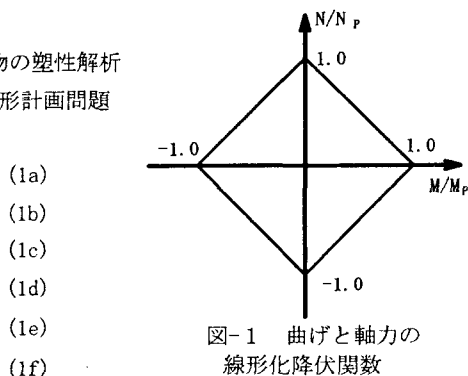


図-1 曲げと軸力の線形化降伏関数

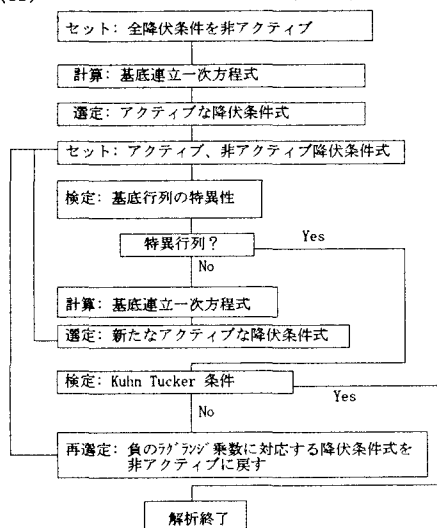


図-2 解析手順

ただし、 β_A, β_C : それぞれマトリクス C, N_A に関する一次結合の係数ベクトル。

式(4)を、式(1d), 式(2)に代入すると、基底連立一次方程式が次式のように得られる。

$$C^T C \beta_C + C^T N_A \beta_N = \alpha F \quad (5)$$

$$N_A^T C \beta_C + N_A^T N_A \beta_N = R_A \quad (6)$$

①この基底連立一次方程式の係数マトリクスが正則で解が得られる場合、現段階のアクティブな降伏条件式のみでは、崩壊荷重に達しておらず、基底解の内力が次式のように得られる。

$$Q = \alpha Q^a + Q^R \quad (7)$$

ただし、肩字 α, R は、それぞれ解の荷重係数に比例する部分と定数部分を表す。これを、非アクティブな降伏条件式に代入して、最大荷重係数および新たなアクティブな降伏条件式が次式によって得られる。

$$\alpha = \min_i (\alpha_i | \alpha_i \geq 0) \quad (8)$$

ここで、 α_i は単一の非アクティブな降伏条件式 i のみに対する荷重係数の最大値である。一方、②基底連立一次方程式に解が存在しない場合は、式(1)の双対問題が解析されていれば真の最大値であるので、これを次式のようなKuhn-Tucker条件によって検証する。

$$C\dot{u} - N_A \dot{\lambda} = 0 \quad (9)$$

$$F^T \dot{u} = 1.0 \quad (10)$$

ここで、 $\dot{\lambda} \geq 0$ ならば、Kuhn-Tucker条件が満足されるので、この解を塑性崩壊荷重として解析を終了する。以上の基本式を用いた解析手順を図-2に示す。

4. 計算例

図-3に示す門形ラーメンを図-1に示す曲げと軸力のインタラクションを考慮した線形降伏関数を用いて解析した。図-4に、提案手法の計算過程で得られた構造

物の降伏モードと、対応する荷重係数を表す。解析結果はあたかも弾塑性解析のように、解析の進展に伴って降伏点の数(アクティブな降伏関数の数)が増え、それに対応する荷重係数が大きくなっている。この計算例では4段階目で、4つの断面が塑性化し、崩壊荷重 $\alpha = 0.480$ に達する。これは、従来の線形計画法による崩壊荷重および崩壊モードと全く同じ結果となり、本法の妥当性が検証される。一方、計算過程の面で見ると、従来の線形計画法は一度の解析で崩壊荷重が得られるので、計算機の容量さえあれば便利である。しかし、計算に要する記憶領域は、表-1に示すように、従来の線形計画法による解析は、提案する手法に比べて、下界定理では11倍、上界定理においても4倍の記憶領域が必要であり、提案手法が計算容量を極めて縮小化できることがわかる。

参考文献 1) M. Z. Cohn and G. Maier: Engineering Plasticity by Mathematical Programming, Pergamon Press, 1979.

2) Livesley, R.K.: A Compact Fortran Sequence for Limit Analysis, Numerical Method and Engineering, Vol. 5, No.3, pp.446-449, 1973.2.

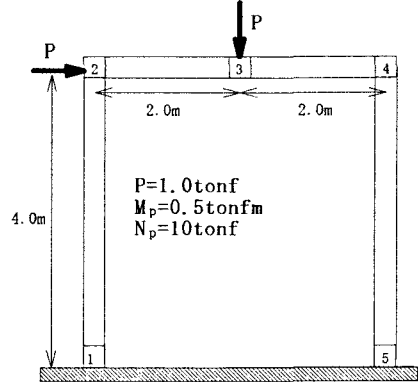


図-3 門形ラーメン

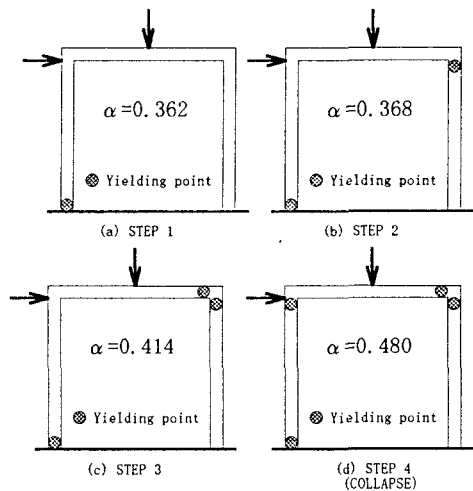


図-4 解析過程

表-1 記憶領域の比較

手 法	線形計画法 Static approach	線形計画法 Kinematic approach	提案手法 基底連立 一次方程式
記憶領域	1 8 5 6	6 6 3	1 6 9
比	11.0	3.9	1.0