

(V-42) Drucker-Prager型弾塑性モデルによるコンクリートの構成則

武蔵工業大学大学院 学 長野竜馬
武蔵工業大学大学院 学 服部尚道
武蔵工業大学工学部 正 吉川弘道

1. まえがき

コンクリートが塑性変形過程でひずみがある領域に集中するstrain localizationはよく知られている。本研究では、局所化解析の前段階として、関連／非関連流れ則を採用した弾塑性構成則の定式化を行い、コンクリート(準脆性材料)への応用として、変形解析を行った。

2. テンソル表示による弾塑性構成式

一般に、弾塑性材料における構成則は速度形式(rate form)により $\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}^{ep} \dot{\epsilon}_{kl}$ ($i, j, k, l = 1, 2, 3$) で表される。ここで、4階のテンソル D_{ijkl}^{ep} は弾塑性接線剛性を表し、以下の原則によって記述することができる。

- a. 降伏関数: $f(\sigma_{ij}, k) = 0$ (1) b. 適合性の条件: $\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial k} \dot{k} = 0$ (2)
- c. 塑性ポテンシャルに基づく塑性流れ則: $\dot{\epsilon}_{kl}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial q}{\partial \sigma_{kl}} = \dot{\gamma} m_{kl}$ (3)

ここに、 k は硬化パラメータ、 $\dot{\epsilon}_{kl}^p$ は塑性ひずみ、 q は塑性ポテンシャル関数、 $\dot{\gamma}$ は正のスカラー関数である。以上の条件に基づき、次式のような3次元における弾塑性材料の構成関係式を導出することができる。

$$D_{ijkl}^{ep} = E_{ijkl}^e - E_{ijkl}^p \quad (4)$$

ここに、 E_{ijkl}^e は弾性成分、 E_{ijkl}^p は塑性成分である。ただし、

$$E_{ijkl}^e = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3)$$

ここに、 λ, μ はLameの定数、 δ_{ij} はKroneckerのデルタ、 Hp は塑性係数を表す。さらに、 m_{ij} は塑性ポテンシャル関数の曲面に対する法線ベクトル、 n_{ij} は降伏曲面に対する法線ベクトルを表し、次のように定義される。

$$m_{ij} = \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}}, \quad n_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6)$$

3. 2次元応力場における係数決定

ここで、摩擦材料もしくは静水圧依存性材料に多用されるDrucker-Prager型の弾塑性構成則を考える。この場合、降伏関数 f および塑性ポテンシャル関数 q については次のように表示される。

$$f = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0, \quad q = \beta I_1 + \sqrt{J_2} - k' = 0 \quad (7)$$

ここに、 I_1 は応力テンソルの第1不変量、 $\sqrt{J_2}$ は偏差応力の第2不変量である。そして、 $\alpha = \beta$ は関連流れ則、 $\alpha \neq \beta$ は非関連流れ則となる。 $\alpha = \beta = 0$ のように静水圧成分(体積成分)を無視すると、von Mises型弾塑性材料となる。

図-1に、 α を変化させたときの2次元平面応力場におけるDrucker-Pragerの降伏曲面を示す。

また、係数 α, k は、材料により決まる定数であり、Kupfer(1969)、Bremer(1970)の実験結果(図-2)に適合させることにより求めた。

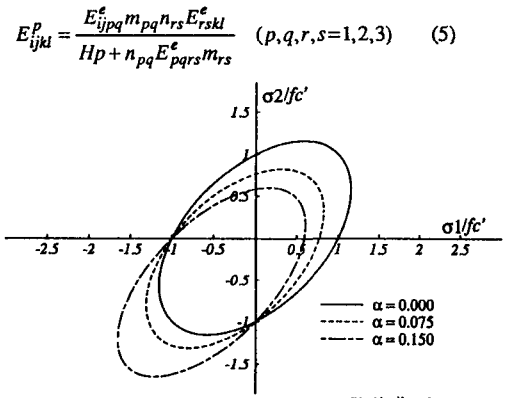


図-1. Drucker-Pragerの降伏曲面

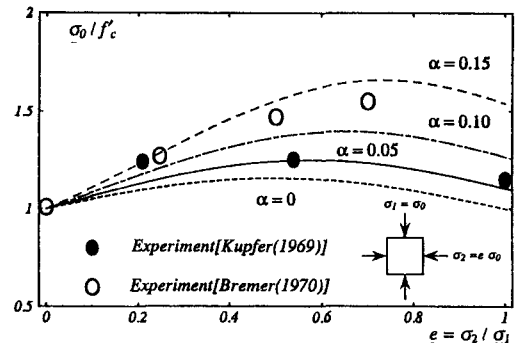


図-2. 係数 α と実験結果との比較

4. 硬化則のモデル化

塑性係数 H_p の符号により以下のように判別される。

$$H_p > 0 \Rightarrow \text{ひずみ硬化} \quad H_p < 0 \Rightarrow \text{ひずみ軟化}$$

また、 H_p は種々のモデル化、表示形式が検討されているが、ここでは次式のような加工硬化則(work hardening)を採用する。

$$H_p = H_p(\bar{\epsilon}_p) \quad , \quad \bar{\epsilon}_p = \int d\bar{\epsilon}_p \quad (8)$$

このとき、Drucker-Pragerモデルの相当塑性ひずみ $\bar{\epsilon}_p$ は相当塑性ひずみ増分と単位体積あたりの塑性仕事によって定義する方法により次式のように求めた。

$$d\bar{\epsilon}_p = \frac{\beta+1/\sqrt{3}}{\sqrt{3\beta^2+1/2}} \sqrt{de_{ij}^p de_{ij}^p} \quad (9)$$

一方、硬化/軟化の度合いは $H_p - \bar{\epsilon}_p$ 関係によって表現され、コンクリートへの適用性を考え、次式のようにモデル化した。

$$H_p = \xi E_e (h_1 + h_2 \bar{\epsilon}_p), \quad \xi = \exp(-z \bar{\epsilon}_p) \quad (10)$$

ここに、 E_e は弾性係数である。

図-3に硬化曲線のモデル化の例を示した。

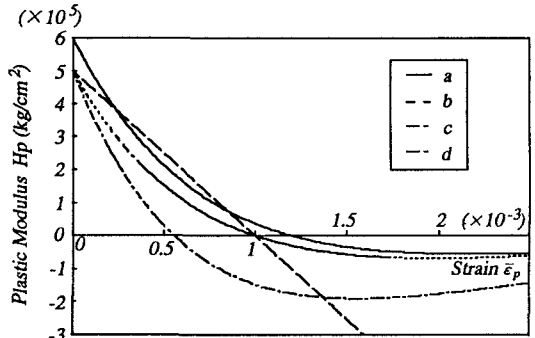


図-3 硬化曲線のモデル化

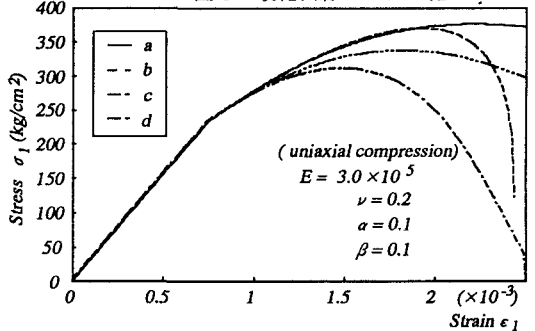


図-4 硬化曲線のモデルを採用した応力～ひずみ関係

5. 数値計算例

平面応力問題として考えるとき式 (5) に提示した塑性成分は具体的に次式で示される。

$$E_{abcd}^p = \frac{(\lambda_0 \frac{S_1+S_2}{2\sqrt{J_2}} \delta_{ab} + 2\beta\lambda_0\delta_{ab} + 2\mu(\frac{S_{ab}}{2\sqrt{J_2}} + \beta\delta_{ab})) \{ \lambda_0 \frac{S_1+S_2}{2\sqrt{J_2}} \delta_{cd} + 2\alpha\lambda_0\delta_{cd} + 2\mu(\frac{S_{cd}}{2\sqrt{J_2}} + \beta\delta_{cd}) \}}{H_p + \frac{S_1+S_2}{2\sqrt{J_2}} \{ 2(\lambda_0+\mu)(\alpha+\beta) \} + 4\alpha\beta(\lambda_0+\mu) + \frac{1}{4J_2} \{ \lambda_0(S_1+S_2)^2 + 2\mu(S_1^2+S_2^2) \}} \quad (11)$$

弾性定数は $E_e = 300000 \text{ kg/cm}^2$ 、ポアソン比は $\nu = 0.2$ 初期降伏強度は 200 kg/cm^2 である。

図-4は図-3の硬化曲線モデルを用いたときの圧縮応力～ひずみ関係である。なお、それぞれの硬化曲線モデルの係数は以下に示す。

表-1 硬化曲線モデルの係数

model	h_1	h_2	z
a	1/5	-167	1000
b	1/6	-167	0
c	1/6	-167	1000
d	1/6	-300	1000

図-5、図-6は硬化曲線モデル c を用いて解析を行った。また、係数 α, β について $\alpha = 0.1$ として β を変化させた。結果として、 β が増加するほど硬化・軟化の進展が早く見られるが、これら3者の違いは小さいことがわかる。また、解析結果の応力～ひずみ曲線はコンクリートへの適用を考えたとき、まだ不十分であるので実験結果からの同定など検討が必要である。

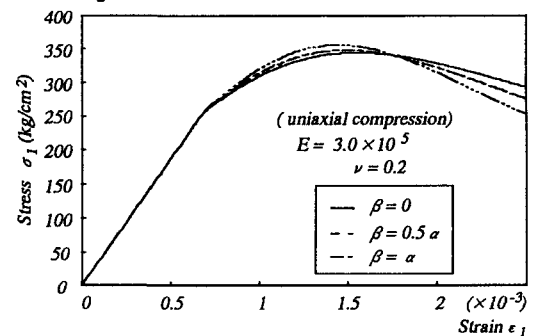


図-5 応力～ひずみ関係(1軸圧縮)

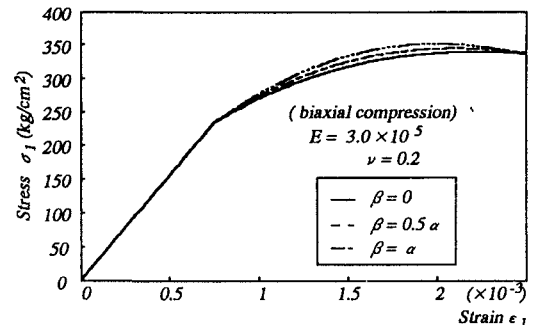


図-6 応力～ひずみ関係(2軸圧縮)

参考文献

(1) W.F.Chen : PLASTICITY IN REINFORCED CONCRETE