

○ 中央大学 学生員 稲本 耕介
 (株) INA 正員 高木 利光
 中央大学 正員 川原 陸人

1 はじめに

海岸における波浪の解析は、沿岸の防災という問題にも通ずる大変重要な問題であり、数値計算による解析も様々になされている。しかし今までの数値計算では、設定された初期条件、境界条件、およびモデル中のパラメータ等に対して、いかに正しく計算されるかということに主眼が置かれてきた。

しかし、それらの条件には不確実な要素が多く含まれることから、実際に観測されるデータを効率的に取り込み、より現実に即した計算結果を求めることを考える。

ただ観測データにはモデル化されていない現象（たとえば非線形現象など）や観測時の雑音等が含まれていることから、そのデータには適切な処理が必要になってくる。

本研究は、観測雑音の消去等の問題に対してカルマンフィルタを適用することで波浪の伝播の推定（水位変動量の推定）を行うものである。

本報告においては、まず基本的なカルマンフィルタの特性を把握するため、モデル波形および現地観測波形を用いた数値計算例を示した。

2 解析モデル

波浪伝播を表す式として Berkhoff の緩勾配方程式がある。ここではその式と等価である以下の非定常緩勾配方程式(西村ら^[1])を基礎方程式として用いるものとする。

$$\frac{\partial q_x}{\partial t} + c^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial t} + c^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{n} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (n q_x) + \frac{\partial}{\partial y} (n q_y) \right\} = 0 \quad (3)$$

ここに、 q_x, q_y は x, y 方向への線流量、 η は水位変動量を表す。 c は波速、 n は「波速と群速度の比」であり、以下の関係を持つ。

$$c = \frac{g}{k} \sqrt{\tanh kh}, \quad n = \frac{c_g}{c} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (4)$$

式(4)において g は重力加速度、 h は水深、 k は波数であり、それぞれと角周波数 ω との間に次の分散関係式が成立している。

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (5)$$

2.1 有限要素方程式

線流量および水位に対してその空間近似には三角形一次要素による内挿補間関数を用い、ガラーキン法を適用すると以下の有限要素方程式を得る。

$$M_{\alpha\beta} \dot{q}_{i\beta} + c^2 H_{\alpha\beta} \eta_\beta = 0 \quad (6)$$

$$M_{\alpha\beta} \dot{\eta}_\beta + H_{\alpha\beta} q_{i\beta} + \frac{1}{n} S_{\alpha\beta} n_\beta q_{i\gamma} = 0 \quad (7)$$

また時間方向離散化については、一段階の陽的解法を用いるものとする。

3 カルマンフィルタ

3.1 基礎方程式

カルマンフィルタの基礎式を構成するのは離散時間では以下に示す状態式と観測式である。

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{G} \mathbf{w} \quad (8)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H} \mathbf{x}_k + \mathbf{v} \quad (9)$$

ここに、 $\mathbf{x}$ は未知変数ベクトル、 $\mathbf{y}$ は観測量ベクトル、 $\mathbf{A}$ は状態量遷移行列、 $\mathbf{H}$ は観測行列、 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ はそれぞれシステム雑音、観測雑音である。さらにこれらの雑音に対して以下の性質を有するものとする。

$$E\{\mathbf{w}_k\} = 0, \quad cov\{\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_j\} = E\{\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T\} = \mathbf{Q} \delta_{kj} \quad (10)$$

$$E\{\mathbf{v}_k\} = 0, \quad cov\{\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j\} = E\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_j^T\} = \mathbf{R} \delta_{kj} \quad (11)$$

ここに、 $E\{\}$ は期待値、 δ はクロネッカーのデルタを示す。また、雑音は白色ノイズとし $\mathbf{x}, \mathbf{w}, \mathbf{v}$ は互いに独立であるとする。

3.2 アルゴリズム

状態量推定値、推定誤差共分散に対して、正規過程の仮定に基づいて、以下のような時間更新、観測更新としてまとめられたアルゴリズムが導かれる。初期値を基に繰り返すことにより、各時間での推定値が得られる。

初期値

$$\mathbf{x}_0^* = \bar{\mathbf{x}}_0 \quad (12)$$

$$\mathbf{P}_0^* = \mathbf{V}_0 \quad (13)$$

時間更新 (time update)

$$\mathbf{x}_{k+1}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}_k^* \quad (14)$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^* = \mathbf{A}\mathbf{P}_k^*\mathbf{A}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T \quad (15)$$

観測更新 (measurement update)

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^* \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_k^* \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (16)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_k^* (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R} \mathbf{K}_k^T \quad (17)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k^* + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H} \mathbf{x}_k^*) \quad (18)$$

4 数値計算例

カルマンフィルタの適用性の検討のために、図-1 の様な一様水深の矩形水路を用いたモデルを考える。A-B 端より正弦波を入射させ有限要素法により求められる流速、水位に正規乱数分布となるノイズを付加して疑似観測値とする。水位変動量の推定値 (図-2) と推定誤差共分散の時間推移 (図-3) を示す。

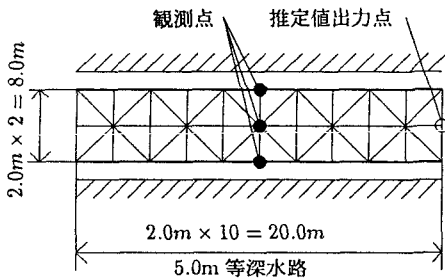


図-1 メッシュ分割図

図-4 に、実観測データを用いた解析を示す。解析結果はシステムノイズに依存し、観測データの影響度の違いがみられる。

5 考察

- システムノイズは、観測点に対応する項のみに与えると、ノイズ分が消去され、よりよい推定値を示した。
- 実観測データを用いた解析では、推定結果はシステムノイズに依存し、本題では $Q = 1.0 \times 10^{-3}$ で観測値を考慮する推定値が得られた。
- 更に、二次元領域での解析も検討を進めている。

参考文献

- [1] Nishimura, H., K. Maruyama, and H. Hiraguchi, 1983: Wave field analysis is by finite difference method, Proc. 30th Japanese Conf. on Coastal Eng., JSCE, pp. 123-127
- [2] Frank L. Lewis, Optimal Estimation, A Wiley-Interscience Publication, 1986

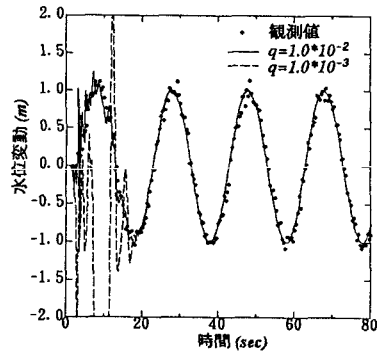


図-2 水位変動量推定値

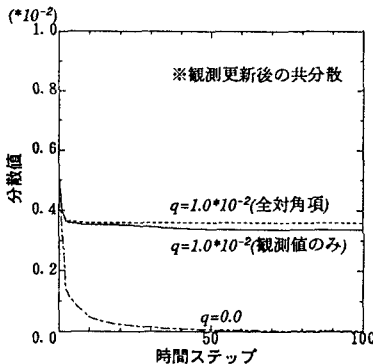


図-3 推定誤差分散の時間推移

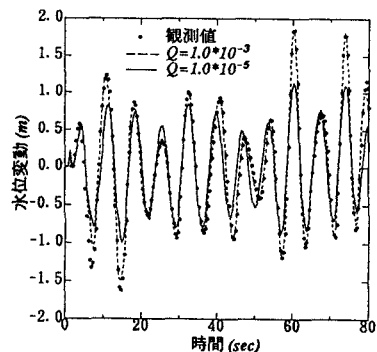


図-4 実観測データによる推定