（Ⅱ −18） 入力データの不確定性を考慮した非定常移流拡散解析

中央大学　学生員　本間　史祥
中央大学　正会員　樫山　和男

1. はじめに

物質拡散に代表される拡散現象の解析は、大気環境や水資源問題に多く用いられている。これまで、拡散現象の解析においては、確定論に基づいた解析が多く提案されてきた。しかし、入力データなどを確定的に決定づけることは一般に難しく、入力データの不確定性に起因する解の変動量を求めることは工学上重要なことである。本論文は非定常移流拡散問題に関して、拡散係数を不確定データとして取り扱い、摂動法に基づく確率有限要素法の提案をするものである。数値解析例として、浅水長波流れ場における移流拡散問題を取り上げ、統計値の評価を行い、本手法の有効性の検討を行った。

2. 基礎方程式と有限要素方程式

物質の拡散現象を表す基礎方程式に、(1) のような平面二次元の移流拡散方程式を用いる。

$$\dot{c} + (uc)_{,x} + (vc)_{,y} - \kappa\,(c_{,xx} + c_{,yy}) = r \tag{1}$$

ここに、κは拡散係数、u, vは節点におけるx, y方向流速成分、, は偏微分を表す。また、境界条件は (2), (3) 式で表される。

$$c = \hat{c} \qquad on \quad S_1 \tag{2}$$

$$\kappa\,(c_{,x}\, l + c_{,y}\, m) = \hat{b} \qquad on \quad S_2 \tag{3}$$

ここに、 $\hat{}$ は既知量を表し、S_1, S_2はそれぞれ境界を表す。

(1) 式に対して、時間方向にはオイラー法、空間方向には三節点三角形一次要素を用いて離散化を行うことにより得られる式は (4) になる。

$$\{C\}^{n+1} = \left[\overline{M}\right]^{-1}\left(\left[\tilde{M}\right]\{C\}^n + \Delta t\,([K]\{C\}^n + [S]\{C\}^n)\right) \tag{4}$$

ここに、$[K]$, $[S]$, $[H]$ は有限要素法によって導かれる係数マトリックスである。また、Δt は微小時間増分量、n および $n+1$ は時間ステップを表す。

3. 1次摂動法に基づいた確率有限要素解析

本論文では、拡散係数に不確定起因が生じる場合を考え、入力データに確率密度関数を仮定し、1次摂動法を用いて解くものとする。拡散係数を (5) 式のような確率過程を含む式で表す。

$$\kappa = \overline{\kappa}\,\{1 + \alpha\,(x_k, y_k)\} \tag{5}$$

ここに$\overline{\kappa}$は κの期待値、$\alpha\,(x_k, y_k)$ は各要素における期待値 0 の確率変数である。これを剛性マトリックスに代入し、テーラー展開を施し、$\alpha\,(x_k, y_k)$ に関して 1 次の項α_k まで考慮することに得られる全体剛性マトリックスは、(6) のような微小変動量を持つマトリックスになる。

$$[K] = \left[K^0\right] + \sum_{k=1}^{mx}\left[K_k^I\right]\alpha_k \tag{6}$$

また、ある時間ステップ n における未知濃度については式 (6) の整合性を考慮し (7) を仮定する。

$$[C]^n = \left[C^0\right]^n + \sum_{k=1}^{nx}\left[C_k^I\right]^n \alpha_k \tag{7}$$

ここで、$\left[\kappa^0\right]\left[C^0\right]^n$は期待値を表し、$\left[\kappa_k^I\right], \left[C_k^I\right]^n$ はそれぞれ、$[\kappa], [C]^n$ のα_kに関する偏微分マトリックスを表す。

(6), (7) を (4) に代入し、1次摂動法によって得られる式は (8) ,(9) で表される。

$$\left\{C^0\right\}^{n+1} = \left[\overline{M}\right]^{-1}\left(\left[\tilde{M}\right]\left\{C^0\right\}^n + \Delta t\left(\left[K^0\right]\left\{C^0\right\}^n + [S]\left\{C^0\right\}^n\right)\right) \tag{8}$$

$$\left\{C_k^I\right\}^{n+1} = \left[\overline{M}\right]^{-1}\left(\left[\tilde{M}\right]\left\{C_k^I\right\}^n + \Delta t\left(\left[K_k^I\right]\left\{C^0\right\}^n + \left[K^0\right]\left\{C_k^I\right\}^n + [S]\left\{C_k^I\right\}^n\right)\right) \tag{9}$$

統計量の評価として、各節点における濃度の期待値と分散値を評価する。期待値、分散は次の式で表される。

$$E[C] = \left\{C^0\right\} \tag{10}$$

$$var[C]^n = \sum_{i=1}^{nx}\sum_{j=1}^{nx}\left\{C_i^I\right\}\left\{C_j^I\right\}E\left[\alpha_i\alpha_j\right] \tag{11}$$

ここに、$E[\alpha_i\alpha_j]$ は、α_i, α_j の共分散である。

4. 数値解析例

数値解析例として、図1に表すような東京湾を取り上げ、浅水長波流れ場における移流拡散解析を行った。計算条件として、流れ場については湾口より、周期12時間、振幅 $0.6m$ の sin 波を送り、渦動粘性係数 $A_l = 10.0(m^2/sec)$、海底摩擦係数 $C_b = 0.01$ とし、2段階陽解法[4]を用いて解析をおこなった。拡散解析については、図1のO点に初期条件として $c = 10.0ppm$ を与え、拡散係数の期待値を $\kappa^0 = 30.0(m^2/sec)$ とした。また、入力確率変数としては、各要素について等しい正規分布を仮定し、標準偏差を 0.1 とし、要素間では完全相関とした。図2に濃度の期待値と 3σ 限界の分布図を表す。これにより、入力データの不確定性に起因する解の変動量が評価されていることが分かる。また、観測点 A,B における時間推移による濃度と分散値の変化を図3に表した。これにより、分散値は濃度の時間変化に影響されていることが分かる。

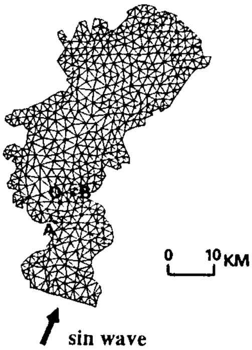

図 1:東京湾モデル
節点数.602　要素数.1007

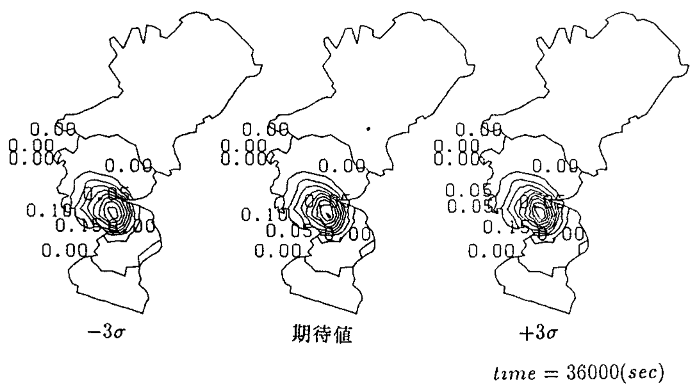

図 2:濃度分布図

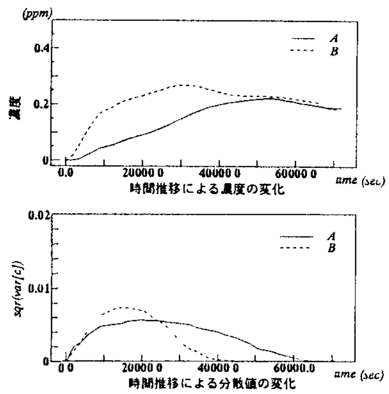

図 3:時間推移による濃度と分散値の変化

5. おわりに

本論文において、非定常移流拡散問題に関して、拡散係数を不確定データとして取り扱い、1次摂動法に基づいた、確率有限要素法の提案を行った。今後は、確率系の他の解析手法と比較を行い、本手法の有用性を検討していく予定である。

参考文献:

[1] 中桐滋, 久田俊明 : "確率有限要素法入門", 培風館

[2] 川原睦人 : "有限要素法流体解析", 日科技連

[3] 櫻庭雅明, 樫山和男 : "反射率の不確定性を考慮した水面波動問題の有限要素解析", 第6回数値流体力学シンポジウム,pp635-638(1992)

[4] Mutsuto Kawahara,Hirokazu Hirano and Khoji Tsubota : "Selective lumping finite element method for shallow water flow", International Jornal for Numerical Methods in Fluids , Vol 2 ,pp89-112 (1982)