（I －37）　数値ラプラス変換を用いた過渡応答解析のための半無限要素について

長岡技術科学大学　学生会員　天野健一
長岡技術科学大学　正会員　林　正
長岡技術科学大学　正会員　岩崎英治

1. まえがき

構造物に落石等が落下したときの局部的な過渡応答挙動や、構造物と地盤の連成効果を考慮した地震動の動的解析等を、汎用性に優れた有限要素法により行う場合には、無限領域を有限領域で置き換えるための無反射境界あるいは無限境界と呼ばれる境界処理が問題になる。このため、粘性境界による方法や、重ね合わせにより反射波を消去するような種々の仮想境界による解を用いる方法などがある。しかし、前者は精度に問題があり、後者は正確であるが、多数の波動が反射する場合には多くの解の重ね合わせが必要である。そこで、本報告は、文献 1) に示した解析法を用いて無限領域を含んだ問題を解析するための半無限要素を開発し、その有効性を示す。

2. 半無限要素の定式化

本文では，時間 t に関してラプラス変換された諸量には，右肩に添え字 s を付けて表す.

図–1 のように x 軸方向に半無限にのびている帯状の要素を考える．荷重は，$x=x_0$ の辺 AB にのみ作用するものとし，初期速度，初期変位は零とする.

時間についてラプラス変換した 2 次元動弾性問題の汎関数は，次式のようになる [1]．

$$\pi^s = \frac{1}{2}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{\infty}\left\{(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial u^s}{\partial x}+\frac{\partial v^s}{\partial y}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial u^s}{\partial y}-\frac{\partial v^s}{\partial x}\right)^2+4\mu\left(\frac{\partial u^s}{\partial y}\frac{\partial v^s}{\partial x}-\frac{\partial u^s}{\partial x}\frac{\partial v^s}{\partial y}\right)\right\}dxdy$$
$$+\frac{s^2}{2}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{\infty}\rho\left\{(u^s)^2+(v^s)^2\right\}dxdy-\int_{y_0}^{y_1}\left(\bar{Q}_x^s u^s+\bar{Q}_y^s v^s\right)dy\Big|_{x=x_0} \quad\cdots\cdots (1)$$

ここに，u^s, v^s は，x, y 方向の変位をラプラス変換したもの，$\bar{Q}_x^s, \bar{Q}_y^s$ は辺 AB に作用した x, y 方向の分布荷重をラプラス変換したものである．また，λ, μ は Lamé の定数，ρ は密度である.

変位 u^s, v^s を正規座標 ξ, η で表された形状関数 $N(\xi,\eta)$ と節点変位から次のように表す.

$$u^s=\sum_{k=1}^{p}N_k(\xi,\eta)u_k^s \ ,\ v^s=\sum_{k=1}^{p}N_k(\xi,\eta)v_k^s \quad\cdots\cdots (2)$$

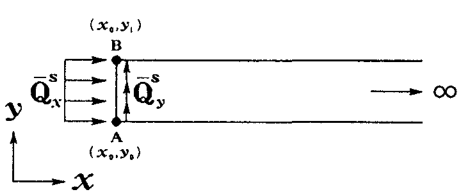
ここに，p は一要素を構成する節点の数である.

また、座標 x, y を正規座標 ξ, η に変数変換する.

$$\xi = 1-2e^{-\beta_1(x-x_0)} \ ,\ \eta=\frac{2y-(y_0+y_1)}{(y_1-y_0)} \quad\cdots\cdots (3)$$

ここに，β_1 は次式により与えられる.

$$\beta_1=\frac{s}{c_1} \ ,\ c_1=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \quad\cdots\cdots (4)$$



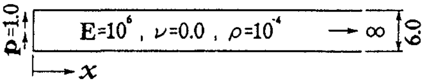
図–1. 半無限要素

式 (3) により、x_0から ∞ まで変化する座標 x が-1 から$+1$ の間で変化する座標 ξ に変換されることから、式 (1) の積分が ξ, η に関する有限領域の積分になり、この汎関数に通常の有限要素法の定式化を施すことにより、半無限要素に関する剛性方程式が得られる。

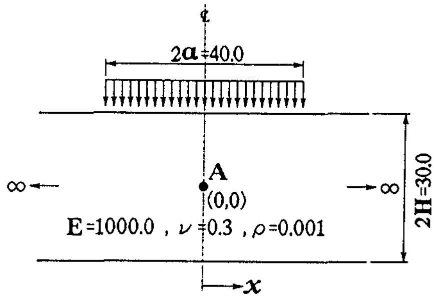
3. 数値計算例

本報告の半無限要素の有効性を確認するために，解析解が求められている 図–2 のような半無限長梁と，上縁に荷重の作用した無限長の帯板の応力波伝播挙動を解析する．なお，いずれの荷重も時間座標に関してステップ状に作用するものとする.

図–2.(a) の半無限長梁の計算例により，半無限要素の補間関数の次数による精度の変化を調べる．端から長さ 100 の区間を有限要素分割し、残りの無限にのびた区間には半無限要素を用いる。有限要素は，長さ



(a) 半無限長はり

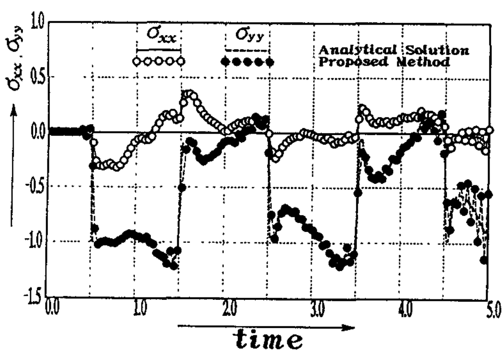


(b) 無限長帯板

図–2. 計　算　例

表–1. 半無限要素の次数と誤差

時間分割数	半無限要素の補間関数の次数			
N	1	2	3	4
64	3.1304	1.3514	1.1787	1.1783
128	3.3140	1.6020	1.3985	1.3934
256	3.7809	2.1141	1.9488	1.9462



図–3. 無限長帯板の応力

方向に 4 次，高さ方向に 1 次のラグランジュ補間関数を用いた 10 節点要素を 20 要素使用し，半無限要素は，長さ方向に 1 ～ 4 次，高さ方向に 1 次の補間関数を用いている．

表–1 は，次式により求めた時刻歴全体の誤差をまとめたものである。

$$e_r = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} |\hat{\sigma}_{xy}(t_m) - \sigma_{xy}(t_m)| \cdots\cdots (5)$$

ここに，$\hat{\sigma}_{xy}(t_m)$ は本手法により求めたせん断応力、$\sigma_{xy}(t_m)$ は半無限長 Timoshenko 梁の解である。また、N は時間分割数である．

これより半無限要素の補間関数次数を増やすと，誤差は減少することが分かる．**図–2.(b)** の無限長帯板では対称性を考慮して、右側の領域を要素分割している。有限要素による分割では、対称軸から高さ $2H$ に等しい大きさの正方形の領域を 100 分割し、残りの無限領域を高さ方向に 10 分割した半無限要素により分割している。有限要素及び半無限要素は，x, y 方向にそれぞれ 4 次のラグランジュ補間多項式を用いた 1 要素 25 節点の高次要素を使用している．

図–3 は，時間分割数を 128 としたときの点 A の応力の時刻歴応答を表している．横軸は，高さ H だけ縦波が伝播する時間 $2H/c_1$ (c_1 : 伝播速度) で正規化している．全解析時間は $T = 10H/c_1$ ，ラプラス変換パラメータ s の実部は $\alpha = 2\pi/T$ としている．これより，応力が不連続に変化する部分と時刻の後半部で波形に乱れが見られるが，他の部分では解析解に概ね良く一致している．

参考文献　1) 岩崎英治・林　正：数値ラプラス変換を用いた衝撃問題の数値解法, 第 2 回落石等による衝撃問題に関するシンポジウム講演論文集,1993.