(I －25)　　多段階陽的有限要素法による角柱周りの流れ解析

中央大学　学生員　大野木英司
中央大学　学生員　金子　賢一
中央大学　正会員　樫山　和男

1. はじめに

Donea ら[1]によって高次精度の方法が提案されている。これは高次精度が保証され、計算のための特別なパラメータを必要としない手法である。しかし一次形状関数を用いた計算においては高次の微係数の離散化が複雑であった。本報告ではより簡単な多段階法により三次精度を実現する三段階のテーラーガラーキン法[2]に着目し、二次元角柱回りの流れ解析において単段階法と比較することで本手法の有効性を示す。数値解析例として二次元角柱回りの流れ解析をした。

2. 基礎方程式及び境界条件

無次元化した非圧縮性ナビエ・ストークスの運動方程式と連続の式は、次式で与えられる。

$$\dot{U}_i + P_{,i} + U_j U_{i,j} - \frac{1}{Re} U_{i,jj} = F_i \tag{1}$$

$$U_{i,i} = 0 \tag{2}$$

ここに、˙は時間に関する偏微分を表し、U は流速、P は圧力、Re はレイノルズ数、F_iは物体力である。
解析対象となる領域の境界Γは、流速が規定される境界Γ_Uと圧力が規定される境界Γ_Pとからなる。

$$U_i = \hat{U}_i \qquad on \qquad \Gamma_U \tag{3}$$

$$P_i = 0.0 \qquad on \qquad \Gamma_P \tag{4}$$

を与えている。ここに ＾ は既知量を与えている。

3. 三段階テーラーガラーキン有限方程式

支配方程式に対する時間方向の離散化に、三段階のテーラーガラーキン法[2]を用いると以下のようになる。

$$U_i^{n+\frac{1}{3}} - U_i^n = \frac{1}{3}\Delta t[-P_{,i}^n - U_{i,j}^n U_j^n + \frac{1}{Re} U_{i,jj}^n] + F_i^n \tag{5}$$

$$U_i^{n+\frac{2}{3}} - U_i^n = \frac{1}{2}\Delta t[-P_{,i}^n - U_{i,j}^{n+\frac{1}{3}} U_j^{n+\frac{1}{3}} + \frac{1}{Re} U_{i,jj}^{n+\frac{1}{3}}] + F_i^{n+\frac{1}{3}} \tag{6}$$

$$U_i^{n+1} - U_i^n = \Delta t[-P_{,i}^{n+1} - U_{i,j}^{n+\frac{2}{3}} U_j^{n+\frac{2}{3}} + \frac{1}{Re} U_{i,jj}^{n+\frac{2}{3}}] + F_i^{n+\frac{2}{3}} \tag{7}$$

(7) 式の発散をとり連続式 $U_{i,i}^{n+1} = 0$ の非圧縮性を考慮し圧力について解くと圧力に関するポアソン方程式が得られる。

$$P_{,ii}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} U_i^{n+\frac{2}{3}} - U_{i,j}^{n+\frac{2}{3}} U_i^{n+\frac{2}{3}} - \frac{1}{Re} U_{i,jj}^{n+\frac{2}{3}} + F_i^{n+\frac{2}{3}} \tag{8}$$

(5), (6), (7), (8) 式にガラーキン法を適用し空間方向の離散かを行う。(8) 式により圧力 P^{n+1}を求め、(7) 式により流速 U_i^{n+1}を求める。

4. 数値解析例

今回の解析には、辺長比 1 : 2 の長方形角柱回りの解析を行った。解析に用いた有限要素は図 1 に示すような節点数 6805, 要素数 13200 でありレイノルズ数は 1200 を用いた。境界条件及び計算条件は図 2 に示す。各手法で安定して計算できる最大のものを最大無次元時間増分量Δt として表 1 に示す。また、IRIS INDIGO R4000 (Slicon Graphics 社製,85MIPS,50MH$_Z$) を用い無次元時間 T=10 まで計算に要した CPU 時間の比較および、C_L値のスペクトル解析により得られたストローハル数の比較も、表 1 に示す。図 3 に三段階法により求めた C_L,C_Dの時間歴（無次元時間 $T = 200$～$T = 400$）を、図 4 に解析結果（ストローハル数）と岡島らの実験結果[3]とを比較したものを示す。CPU 時間の比較では無次元時間増分量が大きく取れるため三段階での計算効率が良いことがわかる。また三段階法の計算から得た特性値（ストローハル数）が実験値と最も近い値が得られたことがわかる。

5. おわりに

本報告において、多段階有限要素法により二次元角柱回りの流れ解析を行った。三段階法の計算で得られた特性値（ストローハル数）は実験値と良い一致を示し、さらに CPU 時間においても無次元時間増分量を大きくとれるメリットがあり効率よく計算できる事が分かった。
今後は、より高いレイノルズ数への適用を検討してゆく予定である。

参考文献

[1]J.Donea,A-Taylor-Galerkin method for convective transport problems,Int.J.Numer Method Engg,Vol.20,pp199,1984

[2]C.B.Jiang,M.Kawahara,K.Kashiyama,A Taylar-Galerkin-based finite element for turbulent flows,Fluid Dynamics Reseach ,vol.9,number4,pp165-178,1992

[3] 岡島厚, 杉谷賢一郎, 矩形柱回りの流れ（レイノルズ数 10^2～10^4の範囲のストローハル数と背圧係数の測定）, 九州大学応用力学研究所所報　第 53 号　昭和 55 年,pp65-89

[4] 金子賢一, 樫山和男, 3 段階テイラーガラーキン法による 2 次元角柱周りの流れ解析, 第２０回土木学会関東支部技術研究発表会講演概要集,pp46-47

表 1　　各手法の比較

手法	1 段階	3 段階
最大無次元時間増分量　Δt	0.001	0.012
無次元時間 $T = 10$ までの CPU時間（秒）	9036.5	1281.6
ストローハル数	0.1220	0.0916

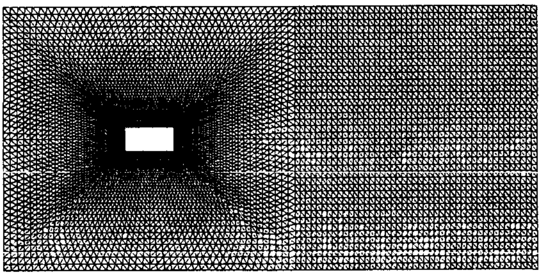

図 1 有限要素図

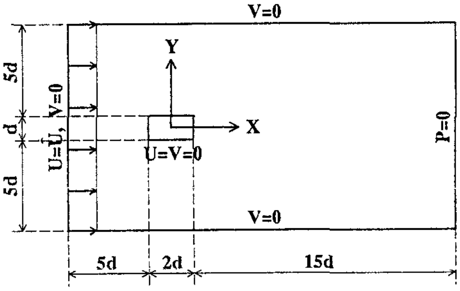

図 2 境界条件及び計算条件

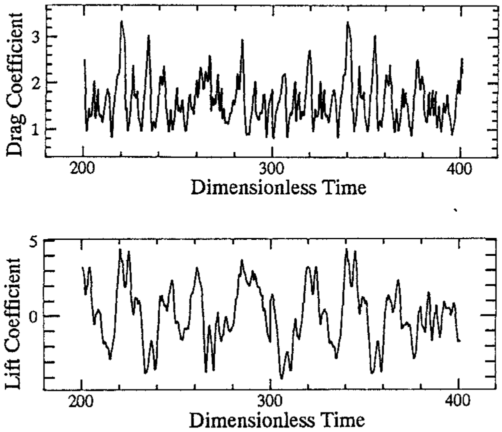

図 3 抗力係数、揚力係数の時間歴

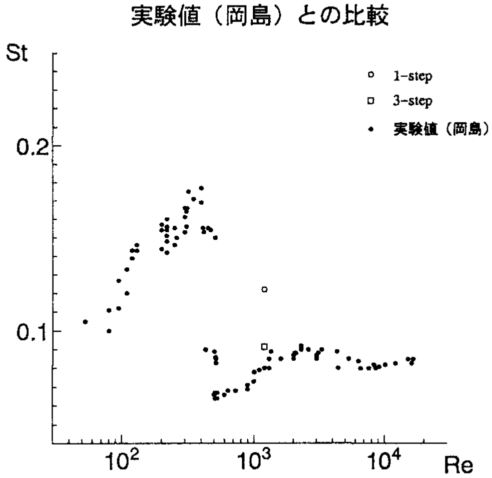

図 4 ストローハル数の実験値との比較