

(I - 24) セン断変形を考慮した積層板の曲げ変形挙動について

早稲田大学理工学研究科 学生員○岸 久嗣

早稲田大学理工学部 正 員 依田 照彦

1. はじめに

板の理論として従来より知られている理論はKirchhoffの仮定に基づくせん断変形を無視した2次元薄板理論である。この理論は薄板においては、十分に正確な結果を与えるが、複合材料積層板のように異方性を積層した場合や板厚が厚くなった場合には、修正が必要である。そこで本論文では各層ごとにせん断変形の影響を考慮した近似解法を用いて、分布荷重を受ける四辺単純支持の3層積層板の数値解析を行い、それらを既往のFEM解析の結果と比較し、その妥当性を調べ、厚さ、Young率の比を変化させたときの最適な断面構成を検討する。

2. 理論の定式化

積層板の各層の変位成分の定義を、Mindlinの板理論¹⁾を参考に次式のように表わす。

$$u(x, y, z) = U_K(x, y) + \theta_{xK}(x, y) \left(z - \frac{h_{K+1} + h_K}{2} \right) \quad (1a)$$

$$v(x, y, z) = V_K(x, y) + \theta_{yK}(x, y) \left(z - \frac{h_{K+1} + h_K}{2} \right) \quad (1b)$$

$$w(x, y, z) = W(x, y) \quad (1c)$$

ここに、 x, y は平板の面内における直交座標の値であり、 z は厚さ方向の座標の値、 K は層の番号である。また、図1に示すように、 h_K は K 番目の層の上端の z 座標を示す。そして u, v, w は、 x, y, z 方向の変位を表し、 θ_{xK}, θ_{yK} は、それぞれ xz, yz 軸面内における K 番目の層の回転角、 U_K, V_K は、 K 番目の層の中央面の x, y 軸方向の変位を表す。

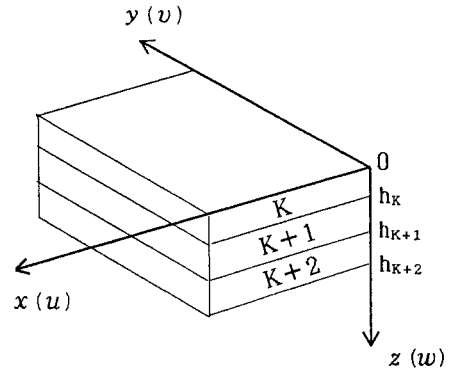


図1. 積層板の全体図

上記の3つの式を用い、Hookeの法則と異方性を考慮して、 K 層の応力-ひずみマトリックスを以下のように作成し、 K 層の応力-変位関係式を求める。

$$\sigma_K = T_K^{-1} Q_K T_K \epsilon_K, \quad \tau_K = T_K^{-1} C_K T_K \gamma_K \quad (2a, b)$$

ここに、 T_K : 2次元の座標変換マトリックス、 Q_K, C_K : 直応力、せん断応力に対する剛性マトリックスである。

また、次に示す式から、平板全体にかかるモーメント、せん断力、膜力を求める。

$$M = \sum_K \int_{h_K}^{h_{K+1}} \sigma_K z \, dz, \quad Q = \sum_K \int_{h_K}^{h_{K+1}} \tau_K \, dz, \quad N = \sum_K \int_{h_K}^{h_{K+1}} \sigma_K \, dz \quad (3a, b, c)$$

式(1), (2), (3)をもとに、面外方向の力の釣合い、面外方向のモーメントの釣合い、膜力の釣合い、板の各層の境界におけるせん断応力と面内変位の適合条件を用いて支配方程式を求める。

さらに、荷重と変位を以下のような三角級数で近似し、重み付き残差法に基づき最終的な荷重-変位マトリックスを作成する。

$$U_K(x, y) = \bar{U}_K \cos \frac{\pi}{l} x \sin \frac{\pi}{l} y, \quad V_K(x, y) = \bar{V}_K \sin \frac{\pi}{l} x \cos \frac{\pi}{l} y, \quad W(x, y) = \bar{W}_K \sin \frac{\pi}{l} x \sin \frac{\pi}{l} y \quad (4a, b, c)$$

$$\theta_{xK}(x, y) = \bar{\theta}_{xK} \cos \frac{\pi}{l} x \sin \frac{\pi}{l} y, \quad \theta_{yK}(x, y) = \bar{\theta}_{yK} \sin \frac{\pi}{l} x \cos \frac{\pi}{l} y, \quad q(x, y) = \bar{q} \sin \frac{\pi}{l} x \sin \frac{\pi}{l} y \quad (4d, e, f)$$

3. 数値解析結果

(1) 解析モデル

定式化の妥当性を検討するために用いた解析モデルは、図2に示すような3層積層板であり、境界条件は四辺単純支持とし、各層の繊維方向角は、①0°/②90°/①0°とする。

E: Young率、 ν : Poisson比、G: せん断弾性係数は表1に示すとおりである。

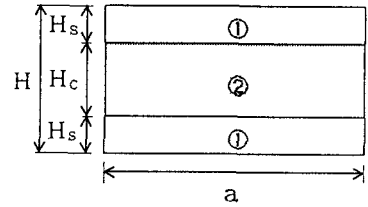


表1. 積層板の材料定数

図2. 解析モデル

	E_1 (kgf/cm ²)	E_2 (kgf/cm ²)	E_3 (kgf/cm ²)	G_{12} (kgf/cm ²)	G_{13} (kgf/cm ²)	G_{23} (kgf/cm ²)	ν
①層	2.5×10^7	1.0×10^8	1.0×10^8	5.0×10^6	5.0×10^6	2.0×10^6	0.25
②層	4.0×10^4	4.0×10^4	4.0×10^4	1.6×10^4	6.0×10^4	6.0×10^4	0.25

(2) FEM解析との比較

解析結果によれば、板中央の変位 w は、FEM解析では 1.836×10^{-3} cm、本解析結果では 1.887×10^{-3} cm となり、本解析は妥当な結果を与えていると思われる。板中央の直応力 σ と板端部のせん断応力 τ のFEM解析と本解析との比較図は、図3のようになり、ほぼ一致している。

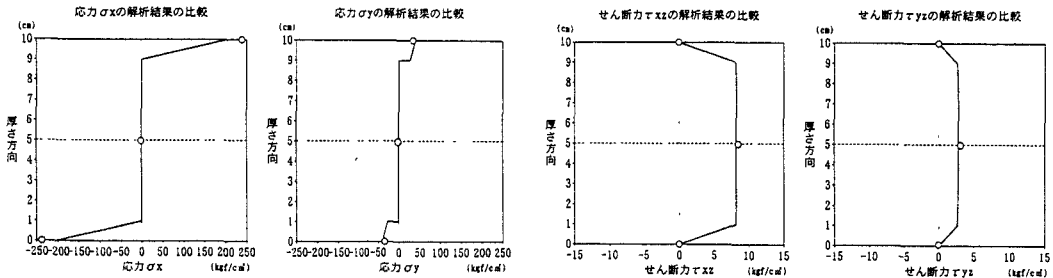


図3. 直応力、せん断応力の比較（実線：本解析の結果、○：FEM解析の結果²⁾）

(3) 最適な断面構成の検討

最適な断面構成は、図2における厚さの比 H_s/H 、面内のYoung率の比 E_1/E_2 を変化させたときの面外変位 w によって検討した。ただし、 $a/H=10.0$ 、板全体の E_1, E_2 は一定とし、図4では $E_1/E_2=1.0$ のとき、図5では $H_s/H=0.1$ のときの変位を基準に無次元化した。そのほかの条件は、(1)の解析モデルと同じとした。図4より、 $H_s/H \approx 0.16$ のとき変位は最小になることがわかる。 $E_1/E_2=30.0$ のときには、それが顕著に現れる。また、図5より、 E_1/E_2 が、大きくなれば変位は増加するが、 $E_1/E_2=20.0$ 以上では変位は、ほぼ一定となっていることがわかる。

参考文献

- 1) K. Marguerre, H. T. Woernle: 弾性平板, 培風館, 1974.
- 2) B. N. Pandya, T. Kant: Finite Element Analysis of Laminated Composite Plates using a High-Order Displacement Model, Composites Science and Technology, vol. 32, 1988.

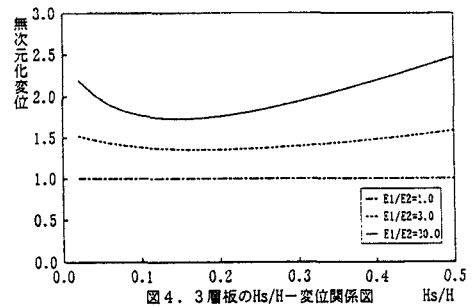


図4. 3層板の H_s/H -変位関係図

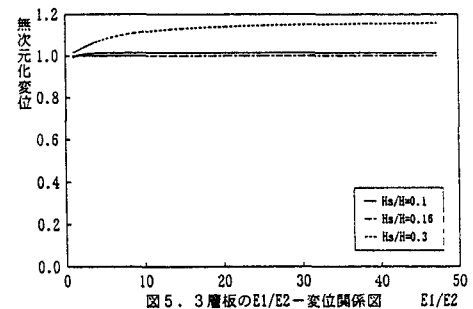


図5. 3層板の E_1/E_2 -変位関係図