(Ⅱ −29)　DDP 法による洪水ダムの最適制御解析

中央大学　正員　安重 晃
中央大学　正員　川原 睦人

1 はじめに

近年、数値計算技術と計算機の発達により、単に物理現象を計算機上でシミュレーションするだけでなく、積極的に現象を制御しようという最適制御を行おうとする試みがなされている。

ここでは、洪水時のダム放流量の決定を最適制御問題として扱い、最も効率の良い放流量を計算により求めることを目的としている。又、最適制御の方法としては、微分動的計画法 (Differential Dynamic Programming, DDP 法) を採用し、本法の適用性について検討を行う。さらに、モデル計算として簡単な洪水ダムの制御問題についての計算例を示す。

2 基礎方程式

流れ場は、以下に示す線形の浅水長波方程式で記述されるものと仮定する。

$$\frac{\partial q_x}{\partial t} + gh\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial t} + gh\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

ここで、q_x, q_yは、それぞれ x 方向及び y方向の流量成分を示しζは水位変動量を示す。又、gは重力加速度,h は水深を示す。

2.1 有限要素方程式

流量及び水位に対して、三角形一次の内挿関数を仮定し (1),(2),(3) にガレルキン法を適用して有限要素方程式を導けば次式を得る。

$$M_{\alpha\beta}\dot{q}_{x\beta} + ghS_{\alpha\beta x}\zeta_\beta = 0 \tag{4}$$

$$M_{\alpha\beta}\dot{q}_{y\beta} + ghS_{\alpha\beta y}\zeta_\beta = 0 \tag{5}$$

$$M_{\alpha\beta}\dot{\zeta}_\beta + S_{\alpha\beta x}q_{x\beta} + S_{\alpha\beta y}q_{y\beta} = 0 \tag{6}$$

(4),(5),(6) 式の時間方向の離散化には二段階陽的解法を適用する。

3 最適制御

簡単のために、先に求めた有限要素方程式を次式のように簡略化して表しておく。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{u} \tag{7}$$

ここで、$\mathbf{x}$ 及び $\mathbf{u}$ はそれぞれ状態量 (流量, 水位上昇量) と操作量 (制御流量) を表している。又、評価関数は次のような 2 次形式の関数として表せるものとする。

$$\begin{aligned} J &= \int_{t_0}^{t_f} G(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\cdot\mathbf{u}\right)dt \end{aligned} \tag{8}$$

ここで、t_0は制御開始時刻を示し t_fは制御終了時刻を示す。又、$\mathbf{Q}$,$\mathbf{R}$ の両マトリックスは、重み係数である。最適制御とは、評価関数 (8) を最小にする様な、操作量 $\mathbf{u}$ を求めることを意味する。

3.1 DDP 法の適用

本研究では、最適制御の方法としてＤＤＰ法を採用している。以下でＤＤＰ法の基本的な考え方を説明する。

はじめに、Dynamic Programming の基礎となる Bellman 方程式を導くために以下のような関数 Vを定義する。

$$V(\mathbf{x}(t), t) = \min_u\left\{\int_t^{t_f} G(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau)d\tau\right\} \tag{9}$$

ここで $t_0 \le t \le t_f$

(9) 式を 2 段階に分割し最適性の原理を適用すれば、次式のように変形することができる。

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}(t), t) &= \min_u\Big\{\int_t^{t+\Delta t} G(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau)d\tau \\ &+ \int_{t+\Delta t}^{t_f} G(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau)d\tau\Big\} \\ &= \min_u\Big\{\int_t^{t+\Delta t} G(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau)d\tau \\ &+ V(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}, t+\Delta t)\Big\} \end{aligned} \tag{10}$$

(10) 式においてΔt が微小であると仮定すれば (10) 式を次のように変形することが出来る。

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}(t), t) &= \min_u\Big\{G(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)\Delta t \\ &+ V(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial V}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\Delta\mathbf{x}\Big\} \end{aligned} \tag{11}$$

さらに、$\Delta\mathbf{x} \simeq \mathbf{F}\Delta t$ を用いて上式を変形すれば次式を得る。

$$0 = \min_{u}\left\{G(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t) + \frac{\partial V}{\partial t} + \mathbf{F}\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\right\} \qquad (12)$$

上式において$\frac{\partial V}{\partial t}$は u とは独立であるから次式とすることが出来る。

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \min_{u}\left\{G(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t) + \mathbf{F}\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\right\} \qquad (13)$$

(13) 式が Dynamic Programming の基礎となる Bellman 方程式である。
(13) 式の変分を取り停留条件を求めれば次式が導かれる。

$$\frac{\partial V_{\mathbf{x}}}{\partial t} + \mathbf{Q}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{A}^T V_{\mathbf{x}} = 0 \qquad (14)$$

ここで $V_{\mathbf{x}} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}$である。また、上式の終端条件として次式が得られる。

$$V_{\mathbf{x}}(t_f) = 0 \qquad (15)$$

さらに、操作量 $\mathbf{u}$ の修正量$\delta\mathbf{u}$ の関係式として次式が得られる。

$$\delta\mathbf{u} = -\epsilon(\mathbf{R}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{B}^T V_{\mathbf{x}}) \qquad (16)$$

ここで、ϵ は微小な調整パラメータである。

最終的には式 (4)〜(6) と式 (14),(16) を同時に満足するような解を、繰り返し計算で求め最適制御を行う。

4 数値計算例

図 1 に計算に用いたメッシュ図を示す。計算領域は、長さ 4000m, 幅 200m, 水深 60m の矩形水路である。左側 (入口) から洪水流量を境界条件として与えて、右側 (出口) で流出流量を制御する場合と制御しない場合の比較をおこなう。

図 2 は、出口で流量制御を行わない場合の水位の変化を示したものである。制御を行わない場合には、入口での流量及び水位変化が出口において同様な形で現れる。図 3 は、出口で流量制御をを行った場合の水位の変化を示したものである。制御を行わない場合には、水位上昇量は最大で 4m 前後あったのに対し、制御を行った場合には、水位変化が±1m 程度に収まっていることがわかる。

5 おわりに

本報での報告は、DDP 法の基本的な考え方と簡単な数値計算結果を示したのみであるが、今後は DDP 法の特徴を生かした、非線形方程式への適用や実際問題への適用を行う考えである。

参考文献

[1] S.G.Tzafestas and J.M.Nightingale: "Differential dynamic-programming approach to optimal nonlinear distributed-parameter control system", PROC. IEE, Vol.116, No.6, pp.1079–1084, 1969

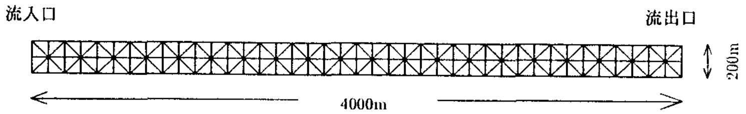

図 1 有限要素分割図

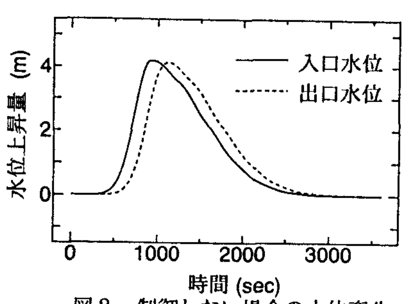

図 2 制御しない場合の水位変化

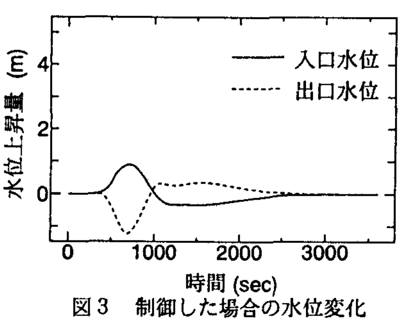

図 3 制御した場合の水位変化