（Ⅱ－28）　Dynamic Programming を用いた洪水制御解析

中央大学　学生員　佐々木建一
中央大学　学生員　坪井武夫
中央大学　正　員　川原睦人

1. はじめに

洪水時のダムの水門の制御には、様々な考え方がある。本論では、最適制御理論を導入することによって、ダムの水門から最適な放流量を決定する手法を検討している。本手法は最適制御理論の一つであるDynamic Programming を用いて、放流量を決定する。なお、基礎方程式に線形の浅水長波方程式、離散化手法に二段階陽解法を用いる。数値解析例では、貯水池内部の水位変動を抑えることを目的として、矩形水路をモデルに用い洪水制御を行う。

2. 有限要素方程式

洪水時の流体の挙動を表す方程式として、浅水長波方程式を用いる。

$$\dot{q}_i + g\,h\,\zeta_{,i} = 0 \tag{1}$$

$$\dot{\zeta} + q_{i,i} = 0 \tag{2}$$

基礎方程式について、有限要素法による空間方向の離散化を行う。通常のガレルキン法に従って、重み付き残差方程式の誘導を行い、三角形一次要素を用いて離散化を行えば、以下のような有限要素方程式が得られる。

$$[M]\,\{\dot{x}\} + [A]\,\{x\} + [B]\,\{u\} + [C]\,\{f\} = 0 \tag{3}$$

式（3）について解けば、状態方程式は以下のようになる。

$$\{\dot{x}\} = -[M]^{-1}(\,[A]\{x\} + [B]\{u\} + [C]\{f\}\,) \tag{4}$$

ここに，状態量：$\{x\}^T = \{q_x \quad q_y \quad \zeta\}^T$，
操作量：$\{u\}$，外力項：$\{f\}$

ここで、{ } はベクトルを、[ ] はマトリックスを表す。時間方向の離散化としては、二段階陽解法を用いて逐次時間毎に流量及び水位変動量を求める。

3. 最適制御

本手法では、全時間にわたる洪水の流入量が既知であるものとして解析を進める。評価関数は水位変動量の二乗和と、操作量の二乗和の項より成り立っている。

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} [\{x\}^T[Q]\{x\} + \{u\}^T[R]\{u\}]\,dt \tag{5}$$

ここに、$[R]$,$[Q]$ は、制御ベクトル $\{u\}$ と状態ベクトル $\{x\}$ に対する重み係数行列であり、制御解析では、評価関数 $J(u)$ を最小にするような制御ベクトル $\{u\}$ を求める。
まず次のようなスカラ関数を導入する。

$$V(x,t) = \min_u \int_t^{t_f} [\{x\}^T[Q]\{x\} + \{u\}^T[R]\{u\}]\,d\tau$$

最適性の原理を用いて整理すると、Dynamic Programming による最適条件式である Bellman-Hamilton-Jacob の式が導かれる。

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial t} &= \min_u[\{x\}^T[Q]\{x\} + \{u\}[R]\{u\} \\ &+ ([A]\{x\} + [B]\{u\} + [C]\{f\})^T \frac{\partial V}{\partial\{x\}} \\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\{x\}}[W]\frac{\partial}{\partial\{x\}}\right]V] \end{aligned} \tag{6}$$

（6）式の［　］内を最小にするような $\{u\}$ は

$$\{u\}^{opt} = -\frac{1}{2}[R]^{-1}[B]^T\frac{\partial V}{\partial\{x\}} \tag{7}$$

で与えられる。（6）式は $V(x,t)$ に関する偏微分方程式であるから、これを解いて $V(x,t)$ を求めれば、（7）式により $\{u\}$ が求まる。ここで、

$$V(x,t) = k + 2\{p\}^T\{x\} + \{x\}^T[P]\{x\} \tag{8}$$

と仮定すると、次のリカッチ型微分方程式が導かれる。

$$-[\dot{P}] = [P][D] + [D]^T[P] - [P][E][R]^{-1}[E]^T[P] + [Q] \tag{9}$$

$$-\{\dot{p}\} = [D]^T\{p\} + [P][F]\{f(t)\} - [P][E][R]^{-1}[E]^T\{p\} \tag{10}$$

上式の境界条件は、

$$[P(t_f)] = [0],\ \{p(t_f)\} = \{0\}$$

で与えられる。
（9）、（10）式を上式の境界条件のもとに逆時間で解けば、最適操作量 $\{u\}^{opt}$ が次式で決定される。

$$\{u\}^{opt} = -[R]^{-1}[B]^T(\{p\} + [P]\{x\}) \tag{11}$$

ここで、各々のマトリックスは次のようになる。

$$[D] = [\tilde{M}]^{-1}(\,[A] + \frac{[\tilde{M}] - [\bar{M}]}{\Delta t}\,) \tag{12}$$

$$[E] = [\tilde{M}]^{-1}(\,[B] + \frac{[\tilde{M}] - [\bar{M}]}{\Delta t}\,) \tag{13}$$

$$[F] = [\bar{M}]^{-1}\left([C] + \frac{[\tilde{M}] - [\bar{M}]}{\Delta t} \right) \qquad (14)$$

ここで、$\bar{M}, \tilde{M}$は、それぞれ集中化マトリックス、混合マトリックスを表す。

4. 数値解析例

数値解析例として図－1のような解析モデル図を用い、全長 2km, 水路幅 200m, 水深 60m とする。領域の上流側境界 S_fで図－2 (a) のような全洪水時間を 1 時間として流入条件をあたえ、領域の下流側境界 S_uで洪水の制御を行う。微小時間増分Δt=0.6 秒、ランピングパラメーター $e = 0.9$ として計算を行った。図－2 (c) は、計算された放流量を示し、図－2 (b) は、領域の中流での、流量を示している。図－3 (a),(b),(c) はそれぞれ、領域の上流側の境界、中流、下流側の境界での水位の時間的変化を示している。ここで、点線は、制御を行わない場合を表し、実線は、Dynamic Programming による最適制御を行う場合を示す。制御を行わない場合と制御を行う場合とでは、水位上昇の抑制に効果があった事がわかる。

5. おわりに

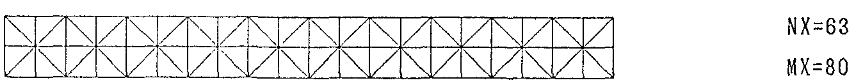
本報では、最適制御理論の一つである Dynamic Programming を用いてダム放流量を決定し、ダムの水位変動量を抑えようとしたものである。今回は確定系で話を進めたが、外乱を考慮した確率系の問題に発展するつもりである。また、実際問題に近づけるために、いろいろな制約条件を考慮していきたい。

参考文献

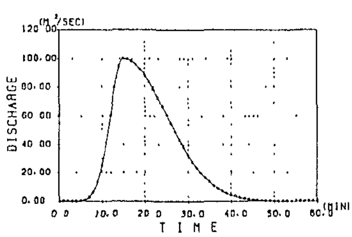
1. 梅津, 川原, "水理モデルを考慮したダム放流量の最適制御", 第 45 回土木学会年次講演会第 II 部門

2. 田中, 川崎, 梅津, 川原, "有限要素法と最適制御理論を用いたダム放流量の最適制御", 第 3 回数値流体力学シンポジウム

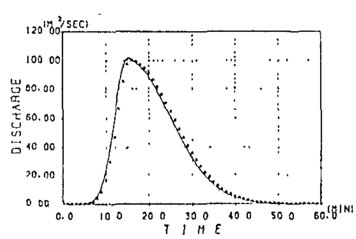
3. 添田, 中溝ら, "確率システム制御の基礎", 日新出版 (1975)



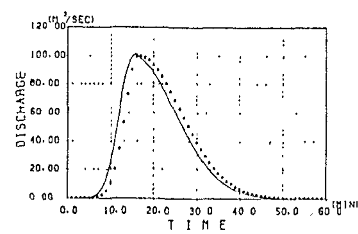
図－1. 有限要素分割図



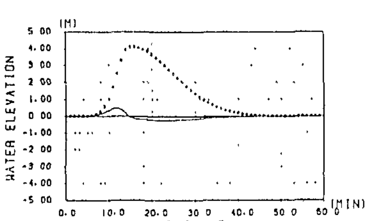
図－2 (a)



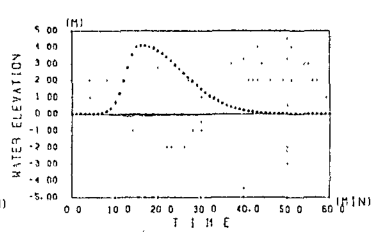
図－2 (b)



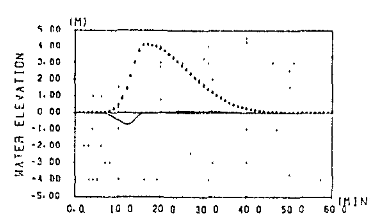
図－2 (c)



図－3 (a)



図－3 (b)



図－3 (c)