

1. はじめに

従来の水面波動解析では、入力データは不確定変動のないものと仮定され解析が行われてきた。しかし、入力データには多くの不確定性が含まれており、その不確定性に起因する変動量を知ることは工学上重要である。

本論文では水面波動問題で用いられる壁面反射率に不確定成分を与え、振幅関数の不確定挙動を1次摂動法を用いた確率有限要素法によって求める方法を提案する。なお、解析例としては解析解の存在する長方形港湾の湾水振動解析及び任意形状港湾の港内静穏度解析を行った。

2. 基礎方程式と境界条件

水面波動問題の解析における基礎方程式としては、水深変化の影響を考慮した緩勾配方程式^[1]を用いる。

$$(CC_g\eta_n)_n + k^2 CC_g\eta = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

ここに、 η は合成波の振幅関数、 C は波速、 C_g は群速度、 k は波数、 Ω は解析領域を示す。境界は図-1に示すように、構造壁面境界 Γ_s と無限遠方の仮想境界 Γ_∞ に分けられ、境界条件は次式で与えられる。

$$\eta_n = ik \sin \theta \frac{1 - K_r}{1 + K_r} \eta \quad \text{on } \Gamma_s \quad (2)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} (\eta_{sc,r} - ik\eta_{sc}) = 0 \quad \text{on } \Gamma_\infty \quad (3)$$

ここに、 θ は波向き角、 K_r は壁面反射率、 i は虚数単位を示す。

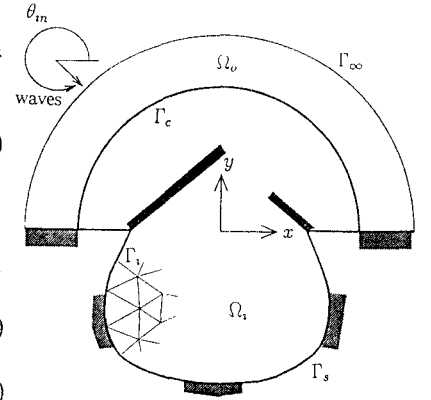


図-1 領域の定義

3. 有限要素方程式

基礎方程式の定式化には、内部領域 Ω_i にはKashiyama, Kawaharaが提案した境界型有限要素法^[2]、水深一定を仮定した外部領域 Ω_o には固有関数展開表示された解析解^[3]を用いた結合解法を適用する。また、内挿多項式としては内部領域 Ω_i にヘルムホルツ方程式の解を満足する三角形要素、外部領域 Ω_o に開境界 Γ_e 上に幾らかの節点を持つ特殊要素を用いて離散化を行うと、次式のような有限要素方程式が得られる。

$$[K]\{\eta\} = \{F\} \quad (4)$$

ここに、 $[K]$ は対称な剛性マトリックス、 $\{F\}$ は入射波による荷重ベクトルである。

4. 1次摂動法に基づく確率有限要素解析

本解析では、壁面反射率 K_r が不確定変動するものと仮定し、(4)式で求められた剛性マトリックス、振幅関数は2次の項を無視したテイラー級数展開された近似式で示される。

$$[K] = [\bar{K}] + \sum_{k=1}^n [K_k^I] \alpha_k, \quad \{\eta\} = \{\bar{\eta}\} + \sum_{k=1}^n \{\eta_k^I\} \alpha_k \quad (5)$$

ここに、各式の第2項は α に関する1階微分値(1次変動率)、 n は領域内に含まれる確率変数の個数、 α_k は反射率の含まれる要素での期待値0の微小確率変数を表す。(4)、(5)式から1次摂動法による振幅関数とその変動は次式で求められる。

$$\{\bar{\eta}\} = [\bar{K}]^{-1} \{F\}, \quad \{\eta_k^I\} = -[\bar{K}]^{-1} [K_k^I] \{\bar{\eta}\} \quad (6)$$

ここに $\{\bar{\eta}\}$ は振幅関数の確定解、 $\{\eta_k^I\}$ は1次変動率を表す。また、統計量の評価には1次近似法を用いて任意の要素での平均、分散を求めた。(5)式より振幅関数の平均、分散は次式で表される。

$$E[\eta] = \bar{\eta} \quad (7)$$

$$Var[\eta] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_i^I \eta_j^I E[\alpha_i \alpha_j] \quad (8)$$

ここで、 $E[\alpha_i \alpha_j]$ は確率変数 $\alpha_i \alpha_j$ の共分散を表す。また、共分散の評価としては共分散マトリックス、自己相関関数を用いて計算を行った。

5. 数値計算例

本手法の有効性を示すために、図-2に示す一定水深の長方形港湾の湾水振動解析に本手法の適用を行った。計算条件として、湾奥 A-B 間で反射率を 0.8 とし、その他の境界では完全反射とした。また A-B 間に含まれる各要素での微小確率変数の標準偏差を 0.05、相関係数を 1.0、波は直角に入射するものとした。ここでは P 点での周波数応答計算を行い、その期待値と本手法を用いた場合の 3σ 限界と、Box - müllar の方法によって正規分布に従った乱数を用いた繰り返し計算を行った場合の 3σ 限界を図-3 に示す。図より、繰り返し計算を行った場合と比較的同じような傾向が見られ、1000 個の乱数を用いたときより 1/100 程度計算時間が短縮されるため本手法が有効であることが認められる。また、 $kl=1.35, 4.2$ の固有周期の付近での変動が非常に大きくみられる。

次に、任意形状港湾の港内静穏度解析を行った。水深形状は湾奥に向かって一様上り勾配 (1/15) であり、入射波の波向きは湾口に対して直角に入射するものとする (図-4 参照)。また、壁面での反射率は 0.8 と仮定し、微小確率変数の標準偏差を 0.5 とし、自己相関関数を用いて A 点での周波数応答計算を行ったときの確定解と 3σ 限界をそれぞれ図-5 に示す。周期が 0.8, 3, 4.5 秒の固有周期付近で激しい変動がみられる。

6. おわりに

本論文において、1次摂動法に基づく確率有限要素法を壁面反射率を不確定量とした水面波動問題に適用することの検討を行った。その結果、繰り返し計算を行うことなく振幅関数の不確定変動量を定量的に求められ、本手法が有効であることが認められた。今後の課題は、複数の不確定変動を考慮にいたれた水面波動解析を行う予定である。

参考文献

- [1] Berkhoff, J.C.W., Computation of combined refraction, Proc. 13th Int. Conf. Coastal Eng., ASCE, pp.471-490, 1972
- [2] Kashiya .K and Kawahara .M A boundary type finite element method for water surface wave problems, Int. J. Number. Methods Fluids, Vol.8 pp.65-69, 1988
- [3] Chen, H.S., and Mei, C.C., Oscillations and wave forces in an offshore harbor, Ralph M. Persons Lab., MIT, Report No.190, 1974

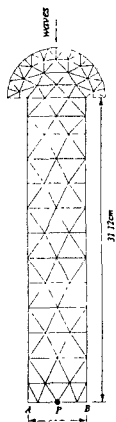


図-2 要素分割図 (要素数 118, 節点数 86)

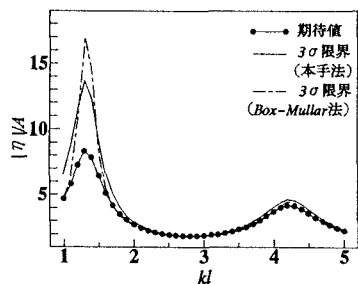


図-3 P 点での周波数応答曲線

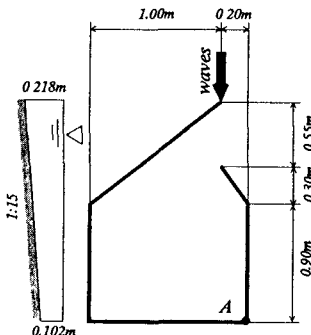


図-4 解析モデル

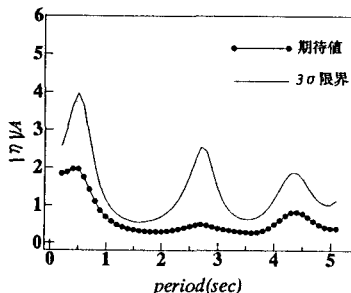


図-5 A 点での周波数応答曲線