（Ⅱ－4）　　　　　　　内部波の緩勾配方程式に関する研究

中央大学理工学部　正　員　山田　正
中央大学大学院　学生員　粂嶋知哉
中央大学大学院　学生員　高橋克人

1、はじめに

本研究は密度二成層状態における内部波に関して、その緩勾配方程式を導いたものである。

2、緩勾配方程式の導出

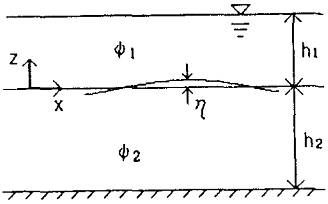

図1.座標設定及び記号の定義

図1のように上層厚をh_1、下層厚をh_2 上層、下層の速度ポテンシャルをϕ_1、ϕ_2、界面の変動量をηと置き、右図のように座標を設定する。

$$\phi_1=(A_1 e^{kz}+A_2 e^{-kz})e^{i(kx-\sigma t)} \quad \text{----} \ (1)$$

$$\phi_2=B\cosh(k(h_2-z))e^{i(kx-\sigma t)} \quad \text{----} \ (2)$$

$$\eta=a e^{i(kx-\sigma t)} \quad \text{-----} \ (3)$$

a) 上端が自由表面の場合：(1)～(3)に対して境界条件を考慮し、A_1 A_2、Bを求めϕ_1、ϕ_2に代入すると次のようになる。

$$\phi_1=-\frac{i\sigma}{k}\frac{gk\cosh(k(z-h_1))+\sigma^2\sinh(k(z-h_1))}{(gk\tanh(kh_1)-\sigma^2)\cosh(kh_1)}\eta \ \text{-----} \ (4)、\quad \phi_2=\frac{i\sigma}{k}\frac{\cosh(k(h_2+z))}{\sinh(kh_2)}\eta \ \text{-----} \ (5)。$$

さらに分散関係式を求めると、

$$C^2=\frac{g\Delta\rho}{k\rho}\frac{1}{\coth(kh_1)+\coth(kh_2)} \quad \text{----} \ (6)。$$

ここで、$\rho_1\simeq\rho_2=\rho$、$\rho_2-\rho_1=\Delta\rho$ である。

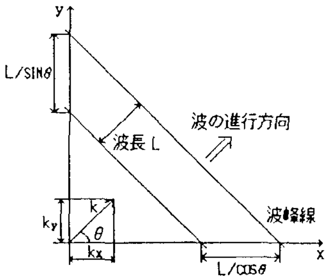

図2.座標設定及び記号の定義

図1での下層のx方向の速度u_2は、

$$u_2=-\frac{\partial\phi_2}{\partial x}=\sigma\frac{\cosh(k(h_2+z))}{\sinh(kh_2)}a e^{i(kx-\ t)} \quad \text{-----} \ (7)$$

下層での変動圧力p_2は、

$$p_2=\rho_2\frac{\partial\phi_2}{\partial t}=\rho_2\frac{\sigma^2}{k}\frac{\cosh(k(h_2+z))}{\sinh(kh_2)}\eta \quad \text{----} \ (8)$$

次に連続の式及び線形化された運動方程式は次のようである。

$$\text{連続の式}\quad \frac{\partial\eta}{\partial t}+\nabla Q=0 \ \text{-----} \ (9)$$

$$\text{運動方程式}\quad \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p_2}{\partial x} \ \text{----} \ (10)\ ,\quad \frac{\partial v(x,y,t)}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p_2}{\partial y} \ \text{----} \ (11)$$

(10)、(11)式のu、vは、それぞれ $u_2*\sin\theta$、$u_2*\cos\theta$である（θは波数ベクトルとx軸のなす角:図2参照）。ここで運動方程式にu_2を乗じてz軸方向に積分しQで割ることで平均化を行い次の式を得る。

$$\frac{\partial Q_x}{\partial t}=-\frac{c_s^2}{n_s}\frac{\Delta\rho}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\tanh(kh_1)}{\tanh(kh_1)+\tanh(kh_2)}n_s\eta \quad \text{----} \ (12)$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial t}=-\frac{c_s^2}{n_s}\frac{\Delta\rho}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\tanh(kh_1)}{\tanh(kh_1)+\tanh(kh_2)}n_s\eta \quad \text{---} \ (13)$$

ここに、Q_x、Q_yはそれぞれx軸方向、y軸方向の下層における単位幅当りの流量とした。さらに、(9)式をtで微分したものに(12)、(13)を代入すれば次のようになる。ここに添字 S は表面波の意味である。

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \nabla \frac{c_s^2}{n_s} \nabla \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{\tanh(kh_1)}{\tanh(kh_1)+\tanh(kh_2)} n_s \eta \quad \text{-----} (14)$$

b) 上端が固定境界の場合：上記と同様に上下層の速度ポテンシャルϕ_1、ϕ_2及び分散関係式を求めると

$$\phi_1 = -\frac{i\sigma}{k} \frac{\cosh(k(h_1-z))}{\sinh(kh_1)} \eta \quad \text{-----} (15)、\quad \phi_2 = \frac{i\sigma}{k} \frac{\cosh(k(h_2+z))}{\sinh(kh_2)} \eta \quad \text{-----} (16)、$$

$$C^2 = \frac{g}{k} \frac{(\rho_2-\rho_1)\tanh(kh_1)\tanh(kh_2)}{\rho_1\tanh(kh_2)+\rho_2\tanh(kh_1)} \quad \text{----} (17)。$$

下層でのx方向の速度u_2、変動圧力p_2は

$$u_2 = -\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = \sigma \frac{\cosh(k(h_2+z))}{\sinh(kh_2)} \eta \quad \text{-----} (18)、\quad p_2 = \rho_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = \rho_2 \frac{\sigma}{k} \frac{\cosh(k(h_2+z))}{\sinh(kh_2)} \quad \text{----} (19)$$

ここで同様の計算を行うと、以下のような緩勾配方程式を得る。

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \nabla \underbrace{\frac{c_s^2}{n_s}}_{①} \nabla \underbrace{\frac{(\rho_2-\rho_1)\tanh(kh_1)}{\rho_2\tanh(kh_1)+\rho_1\tanh(kh_2)}}_{②} n_s \eta \quad \text{-----} (20)$$

3．緩勾配方程式についての考察

ここで、(20)式の緩勾配方程式において

a) $\rho_2-\rho_1=\Delta\rho$、$\rho_1 \simeq \rho_2 = \rho$ の場合

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \nabla \frac{c_s^2}{n_s} \nabla \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{\tanh(kh_1)}{\tanh(kh_1)+\tanh(kh_2)} n_s \eta \quad \text{-----} (21)$$

となり、(14)式と全く同じ式となる。つまり、上層の上端が自由表面でも固定境界でも同一の式になる。

b) $\rho_1 \simeq 0$の場合（表面波の場合）

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \nabla \frac{c_s^2}{n_s} \nabla n_s \eta \quad \text{----} (22)$$

となり表面波の緩勾配方程式を表す。つまり、(20)式は内部波のみではなく、すべての場合で使用できる。

c) $\rho_1 \simeq \rho_2 = \rho$、$\rho_2-\rho_1=\Delta\rho$、水平床で$h_2$=Const. の場合

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \nabla \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{\tanh(kh_1)}{\tanh(kh_1)+\tanh(kh_2)} c_s^2 \nabla \eta = c^2 \nabla^2 \eta \quad \text{-----} (23)$$

となり内部波のc、ηのみで表される波動方程式になる。

4．本研究の結果

本研究で行った緩勾配方程式の導出は、Berkhoffの方法[1)2)]とは異なり運動方程式を直接積分することにより求めたものであり、その導出過程から(20)式中の下線部①は水理学で常用する運動量補正係数を、②は圧力補正係数を表していることがわかる。また、式(20)は表面波の場合も含む一般的な内部波の緩勾配方程式となっていることがわかる。今後はこの緩勾配方程式の適用範囲の検討を行う予定である。

5．参考文献

1) 本間仁 監修/堀川清司 編：海岸環境工学，東京大学出版会，PP. 53～55, 1985.

2) Berkhoff, J. C. W, : Conputation of combined refraction-diffraction, Proc. 13th Coastal Eng. Conf.，PP. 471～490, 1972

3) 服部昌太郎：海岸工学，コロナ社，PP. 13～39, 1987.

4) 冨永政英：海洋波動，共立出版，PP. 543～548, 1976.

5) 椿東一郎：水理学II，森北出版，PP. 92～105, 1974.