(I −33) フーリエ変換を用いる過渡応答解析での初期条件について(その2)

(株)間組　技術研究所　松原勝己

1. まえがき

一般に、地盤ー構造物系の地震時の過渡応答解析では、地盤の材料減衰や振動数依存性を有する逸散減衰の取り扱いが容易なことから、SHAKEあるいはFLUSH等のプログラムに代表されるように、振動数領域での解を求め、それをFFTにより時刻歴に変換して応答を計算することが多い。一方、上部構造の震動解析では、モード合成法に代表されるような直接に時間領域て時刻歴を求める解法が多用される。この方法では、初期条件すなわち時刻ゼロ(外力が作用し始める時刻)での変位と速度を指定して時刻歴応答が計算される。ところが、先のフーリエ変換を用いて過渡応答を求める方法では、初期条件の指定は陽な形では現れない。一般に、振動系の応答は、入力の特性(フーリエスペクトル)と振動系の性質(伝達関数)の両者に関係している。筆者は先に、振動系としてフォークト型の減衰を有する一自由度系を対象とし、フーリエ変換を用いる過渡応答解析において入力の特性か初期条件に及ぼす影響を検討し、インパルスの様な特別の場合を除いては通常の地震動のような因果性を有する入力の場合に、初変位ゼロ、初速度ゼロの条件が満足されていることを示した[1)]。本報では、振動系として複素減衰タイプの一自由度系をとりあげ、初期条件についての同様の考察を行った。

2. 複素減衰を有する一自由度系の伝達関数

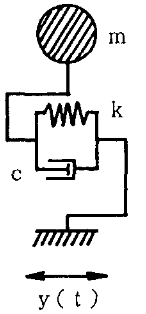


図-1　一自由度系モデル

図-1に示す様な、一自由度系での運動方程式は、次式のように表される。

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=-m\ddot{y}(t) \tag{1}$$

ここに、m:質量、c:減衰係数、k:バネ定数、x:質量mの相対変位、$\ddot{y}(t)$:地動加速度であり、上付きのドットは時間微分を表している。$x=Xe^{i\omega t}$(X:xの複素フーリエ振幅)とおいて振動数領域で書けば、$\dot{x}=i\omega Xe^{i\omega t}$、$\ddot{x}=-\omega^2Xe^{i\omega t}$より

$$\{-m\omega^2+k(1+\frac{i\omega c}{k})\}=-m\ddot{Y} \tag{2}$$

ここに、$\ddot{Y}=-\omega^2Y$(Y:y(t)の複素フーリエ振幅)である。ここで減衰のタイプとして複素減衰を考慮し、$i\omega c/k=2ih$　すなわち、$c=2hk/\omega$(h:減衰定数)と置けば、

$$\{-m\omega^2+k(1+2ih)\}=-m\ddot{Y} \tag{3}$$

さらに、$\varpi^2=k/m$(ϖ:固有円振動数)を考慮すれば、次式を得る。

$$X=H(\omega)\ddot{Y}、\quad H(\omega)=-\frac{1}{\varpi^2-\omega^2+2ih\varpi^2} \tag{4}$$

ここに、$H(\omega)$は入力加速度Yに対する相対変位Xの伝達関数である。式(4)より伝達関数$H(\omega)$は、応答が実関数となるための条件、$H(-\omega)=\overline{H(\omega)}$を満足していないので、$\omega>0$　および$\omega<0$　に対して次式のように定義する。

$$H(\omega)=\begin{cases} H_1(\omega)=-\dfrac{1}{\varpi^2-\omega^2+2ih\varpi^2}=\dfrac{1}{(\omega+\alpha)(\omega-\alpha)} & (\omega>0) \\ H_2(\omega)=-\dfrac{1}{\varpi^2-\omega^2-2ih\varpi^2}=\dfrac{1}{(\omega+\beta)(\omega-\beta)} & (\omega<0) \end{cases} \tag{5}$$

ここに、$\alpha=(p+iq)\varpi,\ \beta=(-p+iq)\varpi,\ p=\sqrt{(\sqrt{1+4h^2}+1)/2},\ q=\sqrt{(\sqrt{1+4h^2}-1)/2}$である。

3. 複素減衰を有する一自由度系の初期条件について

入力 f (t)のフーリエ変換をF(ω)とすれば、応答g (t)は、伝達関数H(ω)を介して、次式のように書ける。

$$g(t)=(1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (6)$$

従って、応答g (t)および$\dot{g}$(t)の初期値は、式(5)を考慮して

$$g(0)=(1/2\pi)\int_{0}^{\infty}H_1(\omega)F(\omega)d\omega+(1/2\pi)\int_{-\infty}^{0}H_2(\omega)F(\omega)d\omega \qquad (7)$$

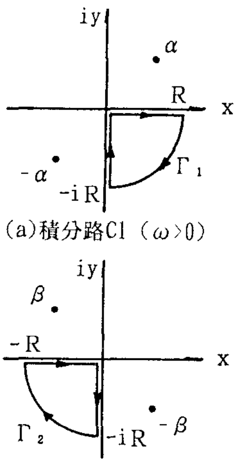
$$\dot{g}(0)=(i/2\pi)\int_{0}^{\infty}\omega H_1(\omega)F(\omega)d\omega+(1/2\pi)\int_{-\infty}^{0}\omega H_2(\omega)F(\omega)d\omega \qquad (8)$$

ここで、 $\phi_1(z)=(1/2\pi)H_1(z)F(z)$、$\phi_2(z)=(1/2\pi)H_2(z)F(z)$とおき、それぞれ図-2に示す積分路C1およびC2に沿う複素積分を考える。

F (z)がz ≦0で正則であると仮定すれば、留数定理より次式が成立する。

$$\int_{0}^{R}\phi_1(z)dz+\int_{\Gamma_1}\phi_1(z)dz+\int_{-iR}^{0}\phi_1(z)dz=0 \qquad (9)$$

$$\int_{-R}^{0}\phi_2(z)dz+\int_{\Gamma_2}\phi_2(z)dz+\int_{0}^{-iR}\phi_2(z)dz=0 \qquad (10)$$



(a)積分路C1 (ω>0)

(b)積分路C2 (ω<0)

図-2 積分路C1およびC2

ここで、Ｉｍｚ＜0でｚ→∞のときF (z)→0を仮定すれば、Γ_1およびΓ_2に沿う積分は、R→∞でゼロになる。したがって、ｚ＝ｉｙと置けば、式(5)、(7)、(9)および(10)より次式をうる。

$$\begin{aligned}g(0)&=\int_{0}^{\infty}\{\phi_2(-iy)-\phi_1(-iy)\}\,idy\\&=(i/2\pi)\int_{0}^{\infty}\{H_2(-iy)-H_1(-iy)\}\,F(-iy)dy\\&=(1/\pi)\int_{0}^{\infty}\frac{2h\varpi^2}{(\varpi^2+y^2)^2+4h^2\varpi^4}\,F(-iy)dy\end{aligned} \qquad (11)$$

同様にして、式(8)を評価すれば

$$\begin{aligned}\dot{g}(0)&=(i/2\pi)\int_{0}^{\infty}\{H_2(-iy)-H_1(-iy)\}\,yF(-iy)dy\\&=(1/\pi)\int_{0}^{\infty}\frac{2h\varpi^2}{(\varpi^2+y^2)^2+4h^2\varpi^4}\,yF(-iy)dy\end{aligned} \qquad (12)$$

式(11)および(12)から、複素減衰を有する一自由度系に対して、初変位ゼロ、初速度ゼロの条件が必ずしも満足されないことがわかる。

4. インパルスに対する応答

入力がインパルスの場合、f (t)＝$\ddot{y}$(t)＝δ(t)よりF(ω)＝１となるから式(11)より

$$\begin{aligned}g(0)&=(1/\pi)\int_{0}^{\infty}\frac{2h\varpi^2}{(\varpi^2+y^2)^2+4h^2\varpi^4}\,dy\\&=q/(2\varpi\sqrt{1+4h^2})\quad ここに、q=\sqrt{(\sqrt{1+4h^2}-1)/2}\end{aligned} \qquad (13)$$

ここで、積分公式[2)] $\int_{0}^{\infty}(1/(ax^4+2bx^2+c))dx=\pi/2\sqrt{2c(b+\sqrt{ac})}$ を用いた。

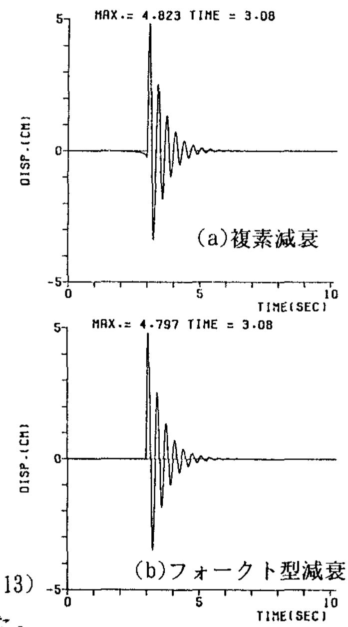


図-3 インパルス応答波形

式(13)は、インパルス応答での初変位を表している。これを確かめるために、式(5)で表される伝達関数を、FFTを用いて数値的にフーリエ逆変換し、インパルス応答を求めたのが図-3(a)である。図-3(a)は時刻3secの時点にインパルスを入力したときの応答変位波形を表している。時刻3sec以前に応答変位が発生しているのがみられる。図-3(b)には、比較のためフォークト型減衰を有する一自由度系のインパルス応答波形も示した。

5. あとがき

本報では、複素減衰タイプの一自由度系をとりあげ、フーリエ変換を用いる過渡応答解析での初期条件について検討した。その結果、必ずしも初変位ゼロ、初速度ゼロの条件が満足されないことが明らかになった。今後は、多自由度系の場合についても検討を進めていく予定である。

<参考文献>1)松原勝己：フーリエ変換を用いる過渡応答解析での初期条件について、第19回土木学会関東支部技術研究発表会、1992年3月　2)森口繁一、宇田川銈久、一松信：数学公式Ｉ、岩波書店、1992