

(I - 24) 3 段階テイラーガラーキン法による 2 次元角柱周り流れ解析

中央大学 学生員 金子賢一
中央大学 正会員 檜山和男

1. はじめに

移流が卓越する場合の高精度解析法として *Donea*^[1]によりテイラーガラーキン法が提案されている。この方法は、時間微分項のテイラー展開を、微小時間微分量 Δt の3次の微小項まで考慮して離散化を行う方法である。しかし、この方法は高階時間導関数の離散化を必要とする。本報告では、より簡単な多段階法により3次精度を実現する3段階のテイラーガラーキン法^[2]に注目し、2次元角柱周り流れへの適用を行ったことについて報告する。

2. 基礎方程式と境界条件

流体は、非圧縮粘性流体と仮定して、基礎方程式としてナビエストークスの運動方程式と連続の式を用いる。

$$u_{i,t} + u_j u_{i,j} + \frac{p_i}{\rho} - \nu(u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} = f_n \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad (2)$$

ここに、 $_{,t}$:時間に関する偏微分、 $_{,i}$:水平方向に関する微分、 p :圧力、 ρ :密度、 ν :渦動粘性係数、 f_i :外力を示す。

解析対象となる領域 Ω の境界 Γ は、流速が規定される境界 Γ_u と圧力が規定される境界 Γ_p とからなる。境界 Γ_u では

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } \Gamma_u \quad (3)$$

を与え、境界 Γ_p では、

$$p = \hat{p} \quad \text{on } \Gamma_p \quad (4)$$

を与えている。ここで、 $\hat{\cdot}$ は既知量を表している。

3. 3 段階テイラーガラーキン有限要素法

時間方向の離散化には、3段階のテイラーガラーキン法を適用する。すると(1)の運動方程式は以下のよう離散化される。

$$u_i^{n+\frac{1}{3}} - u_i^n = \frac{\Delta t}{3} \{ -u_j^n u_{i,j}^n - \frac{1}{\rho} p_{,i}^n + \nu(u_{i,j}^n + u_{j,i}^n) \}_{,j} + f_i^n \quad (5)$$

$$u_i^{n+\frac{1}{2}} - u_i^n = \frac{\Delta t}{2} \{ -u_j^{n+\frac{1}{3}} u_{i,j}^{n+\frac{1}{3}} - \frac{1}{\rho} p_{,i}^n + \nu(u_{i,j}^{n+\frac{1}{3}} + u_{j,i}^{n+\frac{1}{3}}) \}_{,j} + f_i^{n+\frac{1}{3}} \quad (6)$$

$$u_i^{n+1} - u_i^n = \Delta t \{ -u_j^{n+\frac{1}{2}} u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{\rho} p_{,i}^{n+1} + \nu(u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{j,i}^{n+\frac{1}{2}}) \}_{,j} + f_i^{n+\frac{1}{2}} \quad (7)$$

ここに、添字は各時刻レベル、 Δt は微小時間増分量である。

また、非圧縮条件を満足させるために次の連続の方程式を導入する。

$$u_{i,i}^{n+1} = 0 \quad (8)$$

ここで(7)式の発散をとり、(8)式を代入すれば次のような圧力 p に関するポアソン方程式が導かれる。

$$p_{,ii}^{n+1} = -\rho \frac{u_{i,i}^n}{\Delta t} - \rho u_j^{n+\frac{1}{2}} u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \nu(u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{j,i}^{n+\frac{1}{2}})_{,j} + f_i^{n+\frac{1}{2}} \quad (9)$$

(5),(6),(7),(9)式にガラーキン法を適用し、流速と圧力に対して3角形1次要素を用いて離散化を行う。各時刻において、(9)式より圧力 p^{n+1} を求め、次いでこの結果を用いて(7)式から流速 u_i^{n+1} を求める。なお、運動方程式の時間方向の解法としては、ヤコビ法に基づく反復法を用いている。

4. 角柱周りの解析

非圧縮粘性流れの数値解析例として、辺長比 1:2 の長方形角柱周りの流れ（レイノルズ数 1200）に適用した計算結果について示す。解析に用いた有限要素は節点数 6805、要素数 12800 であり図 1 に示す。角柱境界周りの最小メッシュ幅は 0.015(境界層内を 2 分割)、 $\hat{u} = 1$ 、 $\Delta t = 0.002$ で、計算を行っている。また計算条件図及び境界条件図を、図 2 に示す。下流境界では $p = \hat{p}$ として Shimura-Kawahara スキームにより上流境界で計算したものを与えている。また図 3 に、 C_D, C_L 値の時刻歴（無次元時間 200~400）を示し、図 4 に C_L 値のスペクトル解析により得られたストローハル数と、岡島らの実験結果^[3]を比較したものを示す。これより、計算で得られた特性値が実験値と良い一致を示していることがわかる。

5. おわりに

本報告において、3 段階テイラー-ガラキン法を 2 次元角柱周り流れに適用した。計算で得られた特性値（ストローハル数）が、実験結果と良い一致を示した。これにより本手法の有効性が、明らかになった。

今後は、より高レイノルズ数流れへの適用検討を行う予定である。

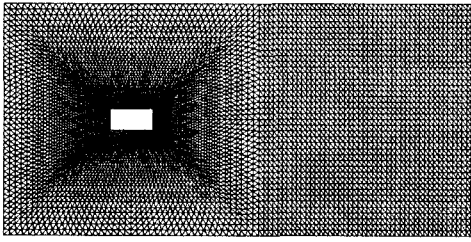


図 1 有限要素分割 節点数= 6805

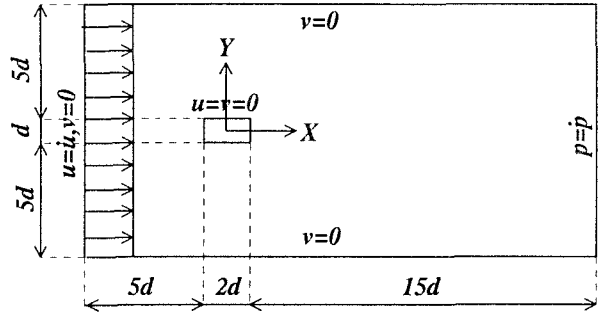


図 2 計算条件及び境界条件図

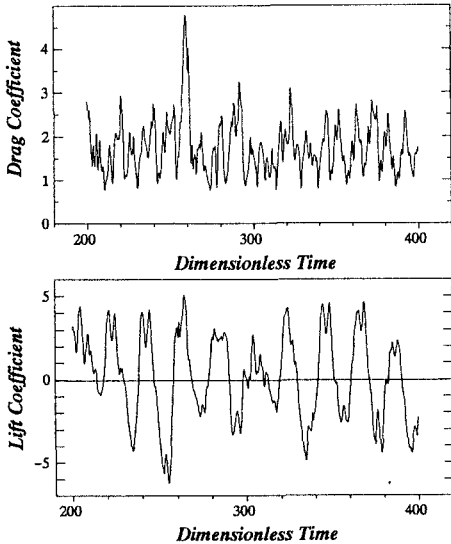


図 3 抗力係数と揚力係数の時刻歴

参考文献

- [1] J.Donea,A-Tailor-Galerkin method for convecctive transport problems,Int.J.Numer Method Engg,vol.20,pp 119,1984
- [2] C.B.jiang,M.Kawahara,K,Kashiyama,A Taylor-Galerkin-based finit element method for turbulent flows,Fluid Dynamics Research ,vol.9,number4,pp165-178,1992
- [3] 岡島厚, 杉谷賢一郎, 長方形断面柱のストローハル数と背圧係数（レイノルズ数の影響）, 日本機械学会論文 文集 B 編,pp2004-2012,1984

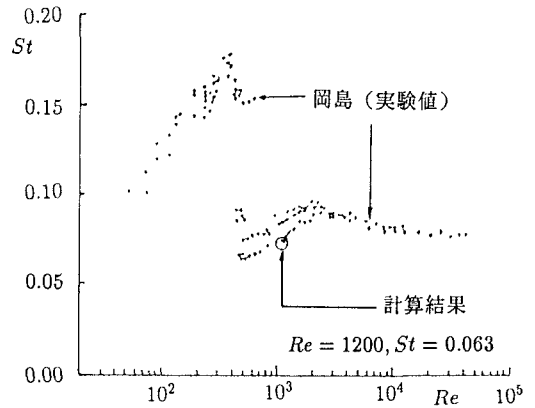


図 4 ストローハル数の実験値との比較