（Ⅰ－3）　ダッフィン型鉄筋コンクリートばりのたわみの算出法について

日本大学　学生員　○李　鴻鈞
日本大学　正　員　能町　純雄
日本大学　正　員　木田　哲量

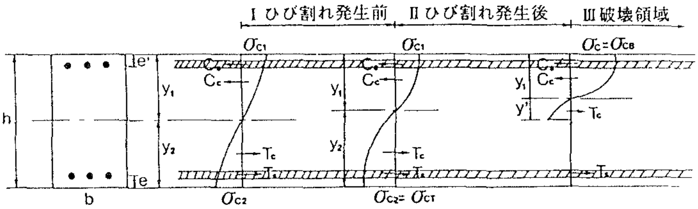
1．研究目的：鉄筋コンクリートが曲げを受ける場合，コンクリート部が呈する応力－ひずみの非線形関係をダッフィン型に仮定し，鉄筋コンクリートばりの曲げ及びたわみの式を定和分変換の変換によって誘導して，はりのたわみの算出法について考察することにする。

2．曲げを受ける鉄筋コンクリート部材の解析法：部材に外力が作用することによって生ずる応力σとひずみεの非線形関係式を式(1)とする。

$$\sigma = E\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3\varepsilon_{CB}^2}\right) \qquad (1)$$

ここで，E：ヤング係数，ε：ひずみ，ε_{CB}：最大応力に対するひずみ

いま，鉄筋コンクリート部材断面の諸元及び応力分布状態を図－1に示すようにする。



図－1 R.C.部材断面の応力分布状態

まず，ひび割れが発生する前の断面（状態Ⅰから状態Ⅱ：タイプ1）における水平方向とモーメントのつり合いは次のようになる。

$$\int_0^{y_2}\sigma_{C2}\,b\,dy + E_S A_{ST}\phi(h-y_1-e) + \int_{-y_1}^{0}\sigma_{C1}\,b\,dy - E_S A_{SC}\phi(y_1-e') = 0 \qquad (2)$$

$$M = \int_0^{y_2}\sigma_{C2}\,b\,y\,dy + E_S A_{ST}\phi(h-y_1-e)^2 + \int_{-y_1}^{0}\sigma_{C1}\,b\,y\,dy + E_S A_{SC}\phi(y_1-e')^2 \qquad (3)$$

ここで，ϕ：曲率，A_{ST}：引張鉄筋の総断面積，A_{SC}：圧縮鉄筋の総断面積，

いま，$Z=\phi y_1/\varepsilon_{CB}$，$Z'=\phi y_2/\varepsilon_{CB}$，$Z+Z'=\phi h/\varepsilon_{CB}$，$M'=M/E_C b h^2\varepsilon_{CB}$とすると，式(2)，(3)の$\sigma_C$に式(1)を代入すると次のようになる。

$$\frac{Z'^3}{12} - \frac{ZZ'^2}{12} + Z'\left\{\frac{Z^2}{12} - \frac{1}{2} - n(P_C\mu' + P_T - P_T\mu)\right\} + \frac{Z}{2}$$
$$-\frac{Z^3}{12} + nZ(P_C - P_C\mu' + P_T\mu) = 0 \qquad (4)$$

$$M' = \frac{Z^3+Z'^3-(Z^5+Z'^5)/5}{3(Z+Z')^2} + \frac{nP_C\{Z-(Z+Z')\mu'\}^2}{Z+Z'} + \frac{nP_T(Z'-Z\mu-Z'\mu)^2}{Z+Z'} \qquad (5)$$

ここで，$n=ES/EC$，$e'=h\mu$，$Z'\leqq\varepsilon_{CT}'/\varepsilon_{CB}$，中立軸$y_1=hZ/Z+Z'$，

$\phi=(Z+Z')\varepsilon_{CB}/h$，$\varepsilon_{CT}'$；コンクリートの最大引張ひずみ値

次に，状態Ⅱから状態Ⅲまでの場合（ひび割れ発生前：タイプ2）は鉄筋とコンクリートの応力が$\sigma_{ST}\leqq\sigma_{SY}$，$\sigma_{SC}<\sigma_{SY}$，$\sigma_{CT}=\sigma_{CT}'$であるから式(2)，(3)に相当するつり合い式は次のようになる。

$$2R^2n\{-P_C\mu' - P_T(1-\mu)\} + 2RnZ(P_C+P_T) + Z^2 - Z'^2 - (Z^4-Z'^4)/6 = 0 \qquad (6)$$

$$M' = \frac{Z^3+Z'^3-(Z^5+Z'^5)/5}{3R^2} + \frac{nP_C(Z-R\mu')^2}{R} + \frac{nP_T\{R(1-\mu)-Z\}^2}{R} \qquad (7)$$

ここで，$R=Z+Z'=\phi h/\varepsilon_{CB}$，$Z'=\varepsilon_{CT}'/\varepsilon_{CB}$（常数）

さらに，引張鉄筋が降伏点に至った場合（タイプ3）は，$\sigma_{ST}=\sigma_{SY}$，$\sigma_{SC}<\sigma_{SY}$，$\sigma_{CT}=\sigma_{CT}'$の場合であるから，つり合い式は式(2)の第2項を$\sigma_{SY}A_{ST}$として，式は次のようになる。

$$-2R^2nP_C\mu' + 2R(nP_CZ - P_T\eta) + Z^2 - Z'^2 - (Z^4-Z'^4)/6 = 0 \qquad (8)$$

$$M' = \frac{Z^3 + Z'^3 - (Z^5 + Z'^5)/5}{3R^2} + \frac{n P_C (Z - R\mu')^2}{R} + \frac{\eta P_T \{R(1-\mu) - Z\}}{R} \tag{9}$$

引張，圧縮両鉄筋ともに降伏に至った場合（タイプ4）は，$\sigma_{ST} = \sigma_{SY}$，$\sigma_{SC} = \sigma_{SY}$，$\sigma_{CT} = \sigma_{CT}'$ であるから，つり合い式は式(2) の第２項を$\sigma_{SY} A_{ST}$，第４項を$\sigma_{SY} A_{SC}$として，次のようになる。

$$R = \frac{E_C \varepsilon_{CB} \{Z^2 - Z'^2 - (Z^4 - Z'^4)/6\}}{2(P_T \sigma_{ST} - P_C \sigma_{SC})} \tag{10}$$

$$M' = \frac{Z^3 + Z'^3 - (Z^5 + Z'^5)/5}{3R^2} + \frac{\eta' P_C (Z - R\mu')}{R} + \frac{\eta P_T \{R(1-\mu) - Z\}}{R} \tag{11}$$

ここで，$\eta = \sigma_{ST} / E_C \varepsilon_{CB}$，$\eta' = \sigma_{SC} / E_C \varepsilon_{CB}$

圧縮鉄筋のみが降伏点に至った場合（タイプ5）は，$\sigma_{ST} < \sigma_{SY}$，$\sigma_{SC} = \sigma_{SY}$，$\sigma_{CT} = \sigma_{CT}'$ の場合であるから，つり合い式は式(2)の第４項を$\sigma_{SY} A_{SC}$として，次のようになる。

$$-2R^2 n P_T (1-\mu) + 2R(\eta' P_C + n P_T Z) + Z^2 - Z'^2 - (Z^4 - Z'^4)/6 = 0 \tag{12}$$

$$M' = \frac{Z^3 + Z'^3 - (Z^5 + Z'^5)/5}{3R^2} + \frac{\eta' P_C (Z - R\mu')}{R} + \frac{n P_T \{R(1-\mu) - Z\}^2}{R} \tag{13}$$

３．定和分変換によるたわみの算出法：鉄筋コンクリートばりの部材軸に沿う曲率分布は単純ではなく，従来の計算法で厳密解析を行うのは困難であった。そこで，単純支持されている鉄筋コンクリートばりが曲げを受ける場合に生ずる曲率を用いたたわみ解析法を提示する。まず，前節に示した理論式によって鉄筋コンクリートばりの任意点Xの曲率比m_r を求めることができる。いま，単純支持はりの支間LをS等分し，r番目の点のたわみをW_r とすると中央差分法によって式(15)となる。

$$\frac{dW_r}{dX} = \frac{W_{r+1} - W_r}{(L/S)} \tag{14}$$

$$\frac{d^2 W_r}{dX^2} = \frac{W_{r+1} - W_r + W_{r-1}}{(L/S)^2} = -\phi_r \tag{15}$$

さて，定和分変換の変換定理は次のように得られる。

$$\sum_{r=1}^{S-1} m_r \sin\frac{i\pi r}{S} = \phi_i \tag{16}$$

$$\frac{2}{S} \sum_{i=1}^{S-1} \phi_i \sin\frac{i\pi r}{S} = m_r \tag{17}$$

ここで，$m_r = \phi_r / \phi_0$,上式中のi,S は正の整数である。なお，ϕ_0 は最大曲率である。いま，ϕ_i をW_i'，m_r をW_r に置き換えることにより，次の変換が成り立つこととなる。

$$W_i' = \sum_{r=1}^{S-1} W_r \sin\frac{i\pi r}{S} \tag{18}$$

$$W_r = \frac{2}{S} \sum_{i=1}^{S-1} W_i' \sin\frac{i\pi r}{S} \tag{19}$$

ここで，式(19)を式(15)に代入すると式(20)を得ることができる。

$$\begin{aligned} & W_{r+1} - W_r + W_{r-1} \\ &= \frac{2}{S} \sum_{i=1}^{S-1} W_i' \left\{ \sin\frac{i\pi(r+1)}{S} - 2\sin\frac{i\pi r}{S} + \sin\frac{i\pi(r-1)}{S} \right\} \\ &= \frac{2}{S} \sum_{i=1}^{S-1} W_i' \left\{ 2\cos\frac{i\pi}{S} - 1 \right\} \sin\frac{i\pi r}{S} \end{aligned} \tag{20}$$

さらに，$\Delta X = L/S$，$D_i = 2\{1 - \cos(i\pi/S)\}$ とおくと，式(15)と式(20)の関係から次式が得られる。

$$\frac{2}{S} \sum_{i=1}^{S-1} W_i' D_i \sin\frac{i\pi r}{S} = m_r (\Delta X)^2 \tag{21}$$

上式におけるm_r に式(17)を代入し，また，式(19)，(21)の関係により，次式を得ることができる。

$$W_r = \frac{2}{S} \sum_{i=1}^{S-1} (\Delta X)^2 \left(\sum_{r=1}^{S-1} m_r \sin\frac{i\pi r}{S} \right) \sin\frac{i\pi r}{SD_i} \tag{22}$$

２節の理論式より，任意状態の中立軸比とモーメントが求められ，その関係から式(22)により任意状態の単純ばりのたわみが求められる。なお，結果は講演当日に発表する。