

中央大学	学生員	金子賢一
中央大学	学生員	渡辺貴司
中央大学	正会員	樫山和男
中央大学	正会員	江 春波

1. はじめに

本研究の目的は、有限要素法により移流拡散方程式を解く場合の1つの有力な手法であるテイラーガラーキン法に基づく高精度計算法を構築するものである。本報告では、幾つかの高次精度(2次以上)のテイラーガラーキン法(TG法)を移流方程式に対して適用し、その精度と安定性について比較検討したことを報告する。

2. 基礎方程式

基礎方程式として、移流方程式を用いる。

$$C_{,t} + u_i C_{,i} = 0 \quad (1)$$

ただし、 C は濃度、 u は流速を示す。

3. 有限要素法による離散化

空間方向の離散化には、通常のガラーキン法を適用し要素としては三角形1次要素を用いた。一方、時間方向の離散化には、以下に示す2次以上の精度を持つ四つの方法を用いた。離散化された有限要素方程式は次のようになる。

1) TG2法^[1]

$$M_{\alpha\beta} C_{\beta}^{n+1} = M_{\alpha\beta} C_{\beta}^n - \Delta t u_i H_{\alpha\beta i} C_{\beta}^n - \frac{\Delta t^2}{2} u_i^2 A_{\alpha i \beta} C_{\beta}^n \quad (2)$$

2) TG3法^[1]

$$M_{\alpha\beta} C_{\beta}^{n+1} = M_{\alpha\beta} C_{\beta}^n - \Delta t u_i H_{\alpha\beta i} C_{\beta}^n - \frac{\Delta t^2}{3} u_i^2 A_{\alpha i \beta} C_{\beta}^n - \frac{\Delta t^2}{6} u_i^2 A_{\alpha i \beta} C_{\beta}^{n+1} \quad (3)$$

3) Two-step法

$$M_{\alpha\beta} C_{\beta}^{n+\frac{1}{2}} = M_{\alpha\beta} C_{\beta}^n - \frac{\Delta t}{2} u_i H_{\alpha\beta i} C_{\beta}^n \quad (4)$$

$$M_{\alpha\beta} C_{\beta}^{n+1} = M_{\alpha\beta} C_{\beta}^n - \Delta t u_i H_{\alpha\beta i} C_{\beta}^{n+\frac{1}{2}} \quad (5)$$

4) Three-step法

$$M_{\alpha\beta} C_{\beta}^{n+\frac{1}{3}} = M_{\alpha\beta} C_{\beta}^n - \frac{\Delta t}{3} u_i H_{\alpha\beta i} C_{\beta}^n \quad (6)$$

$$M_{\alpha\beta} C_{\beta}^{n+\frac{2}{3}} = M_{\alpha\beta} C_{\beta}^n - \frac{\Delta t}{2} u_i H_{\alpha\beta i} C_{\beta}^{n+\frac{1}{3}} \quad (7)$$

$$M_{\alpha\beta} C_{\beta}^{n+1} = M_{\alpha\beta} C_{\beta}^n - \Delta t u_i H_{\alpha\beta i} C_{\beta}^{n+\frac{2}{3}} \quad (8)$$

各時刻における濃度を求めるにあたり、左辺側質量行列を集中化させる従来の陽解法は用いず、反復法(ヤコビ法)を用いている。

4. 数値解析例

数値解析例として、*Rotating - Cone* の問題を取り上げる。流れ場は原点を中心とする反時計回りの回転 ($u = -y, v = x$) であり、境界条件として解析領域 ($-1 \leq x, y \leq 1$) の4辺は $C = 0$ に固定されている。また初期条件として *Cos* カーブ ($0 \leq C \leq 2$) を与えている。図-1 に示す結果は 200step で1周したときの濃度分布である。図-1 から *Two-step* 法や *Three-step* 法では後方かなりの減衰傾向が見られるのに対して、*TG2* 法や *TG3* 法では初期条件 (厳密解) と良く一致していることがわかる。表-1 に四つの方法の 200step における計算結果の一覧を示す。表-1 から *Three-step* 法は *TG2* 法の二倍以上の Δt をとることが出来、安定性に優れていることがわかる。

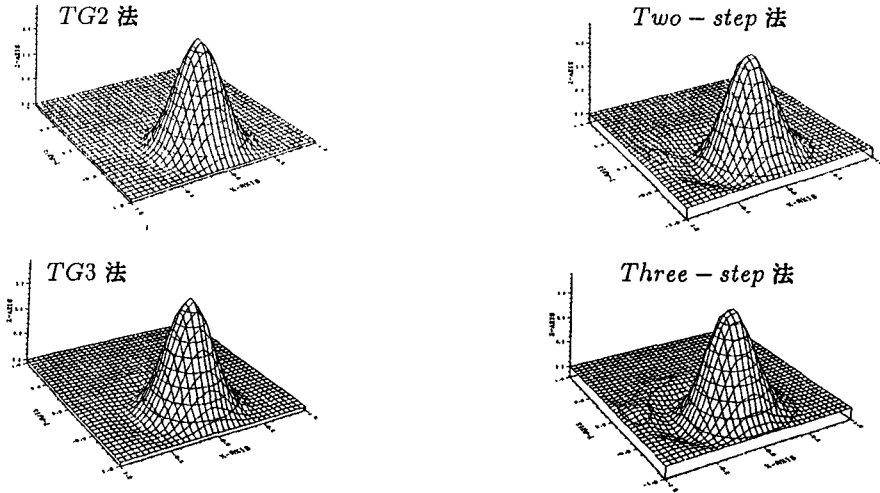


図-1 200stepにおける濃度分布図

手法	濃度:max	濃度:min	cpu(S)	cpu(V)	Δt :限界値
<i>TG2</i>	1.9648E+00	-4.7747E-02	9.60s	8.67s	0.0598s
<i>TG3</i>	1.9631E+00	-6.6871E-02	13.64s	10.64s	0.0714s
<i>Two-step</i>	1.9249E+00	-1.9069E-01	10.70s	8.93s	0.0898s
<i>Three-step</i>	1.9113E+00	-2.1493E-01	15.03s	11.64s	0.1571s

表-1 計算結果一覧

5. おわりに

本報告において幾つかの高次精度のテイラーガラーキン法を、移流方程式に対して適用し、その精度について比較検討した。その結果、精度の面からみると *TG2* 法と *TG3* 法がよく、安定性の面からみると *Two-step* 法と *Three-step* 法が良いことがわかった。今後、これらの手法を用いて実際問題の解析を行っていく予定である。

参考文献:

- [1] JEAN DONEA : A Taylor-Galerkin Method for Convective Transport Problem
(Int.J.Num.Meth.Eng.Vol.20,pp101-109(1984))