(Ⅱ－25) 大雨の発生確率に関する理論的考察

中央大学理工学部 正会員　山 田　正
中央大学理工学部 学生員　渡辺　武彦

1.はじめに：

近年の河川計画における計画流量の算定においては、大雨の発生特性やその規模に関して統計学を援用しつつも、結果的には既往最大降雨に基づくいわゆる既往最大実績主義がとれれているように思われる。この大雨の発生特性に関しては Gumbel, Chow らのいわゆる極値統計学が用いられてきた。これは過去の年最大値の時系列からその確率分布を推定するものであり、これから逆に確率年 T（あるいは超過確率 p）に対する降雨量を推定するものである。しかし確率統計理論の教えるところによれば、確率年 T とはそのようにして求めた降雨量が T(=n) 年間に平均して１回発生するということであり、その値以上の降雨量が発生する確率 p は F(x) を x を越えない確率とすると $F(x)=1-1/n$ であり、 $p=1-\{F(x)\}^n=1-(1-1/n)^n=1-1/e=0.632\cdots$ となる。すなわち T 年間には 約 63%の確率で確率年相当の降雨量を越える降雨があるということになる。この事実は統計学や信頼生理論においてはよく知られている事実であるが、河川工学や、河川水文学において語られることは少ないようである。ここにおいて著者らは従来の極値統計学を否定するものではなく、それを補足する目的で研究を行っており、本論文は大雨の発生頻度に対して新記録の出現頻度という観点から新たに理論的な考察を加えたものである。ところで既往最大値は一般的には記録の中の新記録に相当しているが、これに関しては１９５０年代から文献1)-13)に示すように新記録の出現理論が展開－発展されている. 本研究はこれらの研究成果を大雨の発生特性の解明に応用したものである。

2.新記録の発生個数とその分布：

文献14)において著者らは T 年間における新記録の発生個数の分布に関して数値計算を行っている。一方日本各地の日降雨量の年最大値のデーターの中からその地点の新記録の発生個数の分布を求め、上記の計算結果との比較を行っており、両者の良好な一致を確認している。ここでn年間における新記録N(n)とは $N(n)=\min\{j:j>N(n-1),x_j>x_{N(n-1)}\}$ で定義されるものである。このとき新記録の分布関数 p(n, x)はスターリング数[n, x]を用いて一般的に $\mathrm{StrlF}(n,\theta)=[n,x]*\theta^x/\theta^{[n]}$ で $\theta=1$（今の場合 $1^{[n]}=n!$）の場合、$p(n,x)=[n,x]/n!$ で表される[11)]。ここにp(n, x)=は n 回（年）中 x 回（年）新記録が現れる確率を表している。式中に現れるスターリング数[n, x]は $t^{[n]}=t*(t+1)*\cdots*(t+(n-1))=\Sigma^n_{m=1}[n,m]*t^m$ で定義されるものである。この理論結果と年最大日降雨量の新記録数の分布に関する観測値との比較は著者らによって文献14)においてなされており、良好な一致を見ている。同様に日降雨量の年最大値の時系列の中で新記録数を k回記録するのに要する年数 N が N=n となる確率は [n-1, k-1]/n! となる。よって観測を始めて新記録の回数がk回達成するまでの年数の分布は [x-1, k-1]/x! となる。なお上記の理論展開には年最大日単位降雨量の確率分布 F(x) は現れておらず、任意の確率分布において成立する結果であることは Galambos（文献7) pp. 291, Lemma 6.3.1）によって示されている。

3.新記録の待ち時間：

ここでは次のような問題設定をしてみる。「明治以後今日まで東京の日最大降雨量の時系列（１１５年分のデータ）を見ると過去の記録を６回塗り変えている（新記録数=６）。この記録が塗り返られるには今後何年を要するか？」。　　ここで Nr を記録をとり始めてから r 回目の新記録達成までに要する年数とすると $W_r=N_{r+1}-N_1$ は r 回目から(r+1)回目の新記録がでるまでに要する年数となる。ここで 興味深いことは Chandler(1) によって最初に指摘され, Glick(2), Galambos(9) らによって確認されたように $E(W_r)=\infty$ となることである。すなわち新記録の待ち時間の平均値は無限大になることである。これは record breaking paradox と呼ばれている。これは「もっと多くの条件あるいは情報がなければ将来のことは言えない」ということ

を意味している。しかし D.Haghighi-Tab & C.Wright はこの問題を回避するために平均値で考えるのではなく median で考えると表１に示すように、$W_{r+1}/W_r = e = 2.718\cdots$ の等比級数となることを示している。ここでも同様に考えると、$\Sigma^m{}_{r=1}Wr=N_{m+1}-1=N_{m+1}$ となる。よって上記の問題では$\Sigma^5{}_{r=1}Wr=N_6 = 100$ となり、最初に掲げた問題で言うと明治から数えて新記録が６回出るまでの年数は約100年であることになる。さらに $\Sigma^6{}_{r=1}Wr = N_7 = 292$年となり、292-100=192年となる。すなわち東京では既往最大値の日降雨量の記録が次に破られるのは、その年から数えて192年後となる。このことは現在の国の1級河川の河川計画において洪水の再帰年を重要河川において200年としていることの別の角度からの確認にもなっていると考えられる。なお注意しなければいけないことは，この一連の確率統計学は記録の長さに依存することである。よってもし東京の降雨データが４０年程度（$=\Sigma^4{}_{r=1}Wr=Nr=40$）しか無いならば、この年数は新記録数が５回程度ある値であることから、次に記録が塗り返られるためには表１を参照すると平均として $N_6-N_5=100-40=60$ 年なり、かなり短くなることである。

4.新記録の値の分布：

上記の新記録の値はある平均の回りに分布している。ここではこの分布形について考える。ここで $N_r=N_{r-1}+W_{r-1}$ より年降雨量の最大値のなかでｒ番目の記録 X_{Nr}がx_rとなる確率は多少の演算の後次式で与えられる。

r	2	3	4	5	6	7
Wr	4	10	26	69	183	490
W_r/W_{r-1}	2.5	2.6	2.65	2.65	2.68	2.69

表１　Wr（新記録間の待ち時間）とその比 W_r/W_{r-1}[13]

$dP\{X_{Nr}=x_r\}=[G(x_r)]^{(r-1)}/(r-1)!*dF(x_r)$ ここで $F(x)$ は X_1 の分布、$G(x)=-\ln[1-F(x)]$である。このとき $F(x)$として極値理論でよく使われるexponential形を用いると $F(x)=1-\exp(-x)$より上式に代入すると、$dP\{X_{Nr}=x_r\}=x^{r-1}/(r-1)!*e^{-x}$ となり、ｒ番目の記録の値はガンマ分布をすることが分かる。

参考文献：

1) Chandler, K.N.:The distribution and frequency of record values, J. Roy. Statist. Soc., B14, pp.220-228, 1952. 2) Foster, F.G. and Stuart A.:Distribution-free tests in time-series based on the breaking of records, J. Roy. Statist. Soc., B16, pp.1-22, 1954. 3) Foster F.G. and Theichroew, D.:A sampling experiment on the powers pf the records tests for trend in a time series, J.Roy.Stat.Soc., B17, pp.115-121, 1955. 4) Yang, M.C.K.:On the distribution of the inter-record timesin an increasing population, J.Appl.Orob.12, pp.148-154, 1975. 5) Glick, N.:Breaking records and breaking boards, Amer. Math. Monthly, Jan. pp.2-26, 1978. 6) Dunsmore, I.R.:The future occurence of records, Ann.Inst.Statist.Math. 35, pp.267-277, 1983. 7) Galabbos, J.:The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics, in Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, 1978. 8) Aitchison J. and Dunsmore, I.R.:Statistical Prediction Analysis, Cabbridge University Press, 1975... 9) Galambos, J.:Introductory Probability Theory, Marcel Dekker, Inc., 1984. 10) Renyi, A.:Selected Papers of Alfred Renyi, edited by Pal Turan, "On the extream elements of obserbations", pp.452-467, AKADEMIAI KIADO, BUDAPEST, 1976. 11) 竹内啓、藤野和建：スポーツの数理科学、pp.1-25、共立出版、1988. 12) 渋谷政昭：スターリング確率分布族、応用統計学、15, pp.131-146、1986. 13) Haghighi-Talab, D. and Wright, C.:On the distribution of records in a finite sequence of obserbations, with an application to a road traffic problem, J.Appl.Prob., 10, pp.556-571, 1973. 14) Shorrock, R.W.:On record values and record time, J.Appl.Prob., 9, pp.316-326, 1972. 15) 渡辺武彦、山田　正：新記録の出現理論に基づく大雨の発生頻度に関する研究、本講演概要集、1992. 16) 江藤剛治：大雨の確率分布について、土木学会第40回年次学術講演会概要集、第Ⅱ部門、1985. 17) 江藤剛治、室田明、米谷恒春、木下武雄：大雨の頻度、土木学会論文集　第369号／Ⅱ-5、pp.165-174、1986.