(Ⅱ － 13)

水面波動問題への確率有限要素法の適用

中央大学　学生員　桜庭雅明
中央大学　正会員　樫山和男

1. はじめに

従来の数値解析では、データはすべて変動のないものと仮定され解析が行われてきた。しかし、このような決定論的に得られた確定解だけではなく、データの不確定性に起因する変動量を知ることが重要となる場合が多い。

本研究は水面波動問題において波数を不確定量と仮定し、二次元確率過程として与えることにより応答される振幅関数の不確定変動量を、1次摂動法に基づく確率有限要素法により解析を行うことを検討する。

2. 基礎方程式と有限要素方程式

基礎方程式として、水深一定を仮定したヘルムホルツ方程式を用いる。

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y}+k^2\eta=0 \tag{1}$$

ただし、ηは振幅関数、kは波数を表す。(1) 式にガラーキン法を適用し3角形1次要素を用いて離散化を行うと、次のような有限要素方程式が得られる。

$$\left[K-k^2M\right]\{\eta\}=\{F\} \tag{2}$$

3. 1次摂動法に基づく確率有限要素解析[1]

本解析では、平面内で空間的に波数のみが無相関に不確定変動するものと仮定する。波数kは平均値$\bar{k}$と期待値が0である微小確率変数αを用いて表されるものとする。

$$k(x,y)=\bar{k}\{1+\alpha(x,y)\} \tag{3}$$

(3) 式より、剛性行列$[K]$は次のような2次の項を無視したテイラー級数展開した近似式で表される。

$$\left[K-k^2M\right]=\left[K-\bar{k}^2M\right]+\sum_{k=1}^{n}\left[\left(K-k^2M\right)_k^I\right]\alpha_k \tag{4}$$

ここで$\left[\left(K-k^2M\right)_k^I\right]$は$\left[K-k^2M\right]$の1階微分で求められ、1次変動率であることを示し、nは要素総数に対応する確率変数の総和であることを示す。そして、この形で表された変動に対して振幅関数の変動は次のように仮定する。

$$\{\eta\}=\{\bar{\eta}\}+\sum_{k=1}^{n}\left\{\eta_k^I\right\}\alpha_k \tag{5}$$

(4),(5) 式を (2) 式に代入することにより、1次摂動法による振幅関数が求められる。

$$\{\bar{\eta}\}=\left[K-\bar{k}^2M\right]^{-1}\{F\} \tag{6}$$

$$\left\{\eta_k^I\right\}=-\left[K-\bar{k}^2M\right]^{-1}\left[\left(K-k^2M\right)_k^I\right]\{\bar{\eta}\} \tag{7}$$

(6) 式は振幅関数の確定解、(7) 式は1次変動率であることを示す。また、任意の場所における振幅関数の1次摂動法による近似式 (6),(7) 式は次のような形としてまとめられる。

$$\eta = \bar{\eta} + \sum_{j=1}^{n} \eta_j^I \alpha_j \tag{8}$$

このときの振幅関数の平均値と分散は、１次近似法[2]により次のように評価される。

$$E[\eta] = \bar{\eta} \tag{9}$$

$$Var[\eta] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \eta_i^I \eta_j^I E[\alpha_i \alpha_j] \tag{10}$$

ただし $E[\alpha_i \alpha_j]$ は、確率変数$\alpha_i \alpha_j$の共分散で、解析においては自己相関関数として考えるものとする。

4. 数値解析例

数値解析例として、$10m \times 0.8m$ の長方形水路内の自由振動問題を考えるものとし、図１に要素分割例（要素数１６０，節点数１２３）を示す。境界条件として境界Ａ－Ｂに$\eta = 1.0m$ その他の境界では$\eta_{,n} = 0.0$ の条件を用いた。そして、波数kを不確定として計算を行い、右端の節点Ｐにおける振幅関数の統計量を評価した。図２は数値計算により求められた振幅関数の確定解$\bar{\eta}$、波数に与えた微小確率変数$\alpha(x, y)$、（３）式により求められた変動を持つときの波数 $k(x, y)$ である。また、確率変数は一定周期を持つものと仮定して以下のように与えた。

$$\alpha(x, y) = 0.1 cos\frac{2\pi x}{W_L} cos\frac{2\pi y}{W_T} \tag{11}$$

ただし、W_L, W_Tは x, y方向における確率変数の波長であり、ここでは $W_L = 3, W_T = 0$ とした。図３は x 方向の W_Tを一定とし、W_Lを変化（$W_L = 0 \sim 4$）させたときの振幅関数の分散である。図より要素の分割数を細かくすることにより分散が収束していることがわかった。

5. おわりに

本報告において、１次摂動法に基づく確率有限要素法を水面波動解析に適用することの検討を行った。ここでは波数kが不確定変動するものと仮定して、長方形水路内の自由振動問題における解の収束を検討した。その結果、１波長５０分割程度に分割することにより分散が収束することが明らかになった。今後は、開境界を含む水面波動解析に適用する予定である。

参考文献:

[1] 中桐滋・久田俊明 ，"確率有限要素法入門"， 培風館出版

[2] Amg, A.H.S. and Tang,W,H.,"Probability Concepts in Engineering Planning and Design" , 1, John Wiley and Sons.

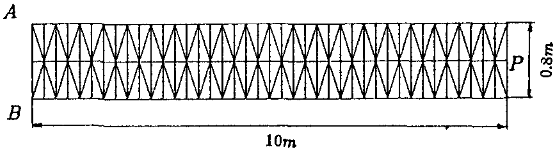
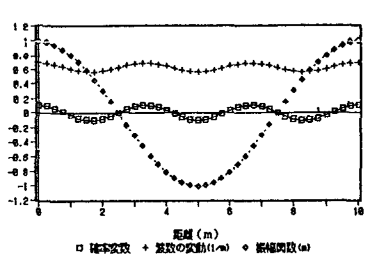


図１　要素分割例
（節点数１２３、要素数１６０）



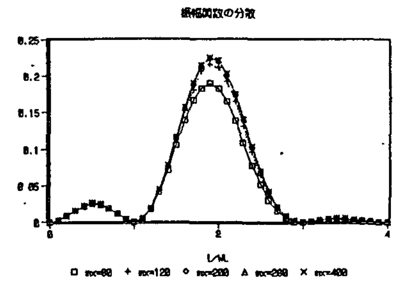


図２　確率変数$\alpha(x, y)$ 変動を持つ波数 $k(x, y)$ 振幅関数η

図３　振幅関数の分散　$Var[\eta]$（ただし，mx は要素数を表す）