

(I-34) ケーブル部材の疲労強度の理論解析

関東学院大学 正員 佐藤尚次
ミュンヘン工科大学 R. RACKWITZ

1. はじめに

吊橋や斜張橋の主ケーブル部材は、通常全体構造解析においては単一の引張材としてモデル化されている。部材レベルの安全性照査でも、引張材としての考慮をするときには、必ずしもワイヤの集合体としての特性に見合った、厳密な取り扱いがされているとはいえない。そうした扱いは、曲げ材として2次応力の影響を考慮するときに限られる。その背景には、照査で実質的に扱う限界状態の性質の相違や、応力を支配する荷重の変動性の大小などがあると考えられる。

半面現行設計のケーブル安全率が、構造システムの中で他の要素に比べて高過ぎて、バランスを失しているという指摘もあるし、全体崩壊のストーリーとしてケーブル破断までの過程が明確でないことや、吊橋技術が未成熟の時期の、やや高めの安全率に固執する必然性が薄れているなどの理由から、将来的には安全率低減の方向に向かう可能性が高いと思われる。その場合、疲労を中心とした、従来さほど問題とされなかった限界状態が表面化すると考えられ、ワイヤの集合体としての特性に見合った、厳密な取り扱いを、力学・確率統計の両側面から行う必要があると思われる。

2. ワイヤのモデル

個々のワイヤの静的強度(引張強さ Z)の確率分布モデルとして最も一般的に用いられるのは、最小値(この場合0)をもつワイブル(Weibull, 極値Ⅲ型分布)モデルである。すなわち

$$F_Z(z) = 1 - \exp[-\lambda(z/u)^k] \quad <\lambda \text{ はワイヤの長さ方向の } Z \text{ の相関に関連する補正係数}> \quad (1)$$

と Z の分布が表現される。また個々のワイヤの疲労破壊については、疲労寿命 T と応力振幅 Δs の間のべき乗則(マイナー則)が知られており、

$$T = K(R/\Delta s)^m \quad (2)$$

を仮定するものとする。式(2)では疲労『強度』に相当するパラメータ R を導入しており、 T のばらつきは、 R のばらつきに帰結すると考える。この R は前記の Z とは、異なった破壊メカニズムに対応する量であり、統計的相関性を仮定する根拠は必ずしもない。しかし Z と同様の確率分布に従うと仮定することは可能であろう。それゆえ、 R の分布関数を、

$$F_R(r) = 1 - \exp[-\lambda(r/r_0)^\alpha] \quad (3)$$

とし、これに式(2)を考慮すれば、 Δs が与えられたときの T の分布関数は、

$$F_T(t; \Delta s) = 1 - \exp[-\lambda(\Delta s/r_0)^\alpha (t/K)^\beta] \quad (3')$$

で与えられる。ここに $\beta = \alpha/m$ である。

3. ケーブルのモデル

ここでは、ケーブルが純引張材として機能し、すべての健全なワイヤが均一な応力環境下におかれており、時間(応力の繰返し数)の経過によって疲労破壊したワイヤの分担応力は、残されたものに再分配されていく過程を考える。これは、パラレル・システムに対してしばしば用いられる「ダニエルズ・モデル」すなわち、『パラレル・システムの構成要素は完全弾脆性体で、応力が破壊強度に達した時点で脆性破壊する(この場合疲労破壊)』『各要素の破壊強度は、独立で、同一の確率密度関数に従うランダム量である』『システムにかかる荷重は各要素が均等に負担し、荷重の増大(この場合時間の経過)に伴って要素に破壊が生じたときは、残る健全の要素に均等に応力再配分が行われる』の考え方が適用できる最も典型的な例となる。

(i-1)本目のワイヤ破断から*i*本目のワイヤ破断に至る時間(繰返し回数)を τ_i とする。ケーブル破断につながる限界破断本数を n_{cr} とすればケーブルの疲労寿命 T_c は、

$$T_c = \sum_{i=1}^{n_{cr}} \tau_i \quad (4)$$

となる。この τ_1 の確率分布関数を、前出のワイブル・モデルで表わして、式(4)を扱っていくことができる。ところが実際に数値計算を行う場合、式(4)はケーブル本数が多いために繁雑になる。そこで今回、これらの離散式を連続量で近似するして、さらに陽な形で解き、容易に計算が可能となった。以下その手法を述べる。

供用開始後の時刻 t において破断しているケーブルの比率を $y=y(t)$ とする。この比率は、大数の法則により、時刻 t においてワイヤが破断している確率（＝ワイヤの寿命が t を下回る確率）として近似的に用いることができる。この近似により y は、

$$y=1-\exp[-\lambda(\sigma/r_c)^\alpha(t/K)^\beta] \quad (5)$$

となる。ここに $\sigma|s \leq \sigma \leq s/(1-y)|$ は時刻 t までの応力再配分履歴を表す量で、

$$|\sigma(t)|^m = 1/t \cdot |s| \cdot |S(t)|^m dt \\ = 1/t \cdot |s| \cdot y^{(1/\beta)} |S(y)|^m (dt/dy) dy \quad (6)$$

ただし $S(y)=S(y(t))=s/(1-y)$

である。式(5)から

$$\ln\{1/(1-y)\} = \lambda[(\sigma/r_c)^\alpha(t/K)^\beta] \quad (5')$$

を得、これと式(6)とから

$$|\sigma(t)|^m \cdot t = [\ln\{1/(1-y)\}] \cdot (1/\lambda) \cdot (r_c)^\alpha |s|^{1/\beta} \cdot K \\ = |s| \cdot y^{(1/\beta)} |S(y)|^m (dt/dy) dy \quad (7)$$

となる。両辺の y の微分を考えれば、結局

$$t = K/\beta \cdot \lambda^{-1/\beta} (r_c/s)^\alpha \cdot$$

$$|s| \cdot y^{(1/\beta)} |S(y)|^m | \ln\{1/(1-x)\} |^{(1/\beta)-1} dx \quad (8)$$

と、 t と y の間の陽な関係式を得る。

4. 数値計算例

式(8)の右辺の定数部分を除く積分パラメータ

$$1/\beta \cdot |s| \cdot y^{(1/\beta)} | \ln\{1/(1-x)\} |^{(1/\beta)-1} dx$$

（横軸）と破壊比率 y （縦軸）との関係をFig. 1に示した。(a)は $m=4$ 、(b)は $m=6$ 、(c)は $m=12$ とし、それぞれ $\beta=1, 2, 3$ としている。

m が大きい程、また β が小さい程、疲労寿命が短いのは当然であるが、その影響度は β の方が大きい。すなわちマイナー則のべき(m)より、疲労強度のばらつきを支配するワイブルのべきパラメータの影響が大きいということである。また、 m が大きいほど、一部のワイヤの破断による応力再配分に対する感度が敏感で、 y が一定のレベルを超えると、急速に全体の破壊に収束していく様子も見えてとれる（曲線の初期の立上りは、むしろ m の小さいときの方が急である傾向がある）。

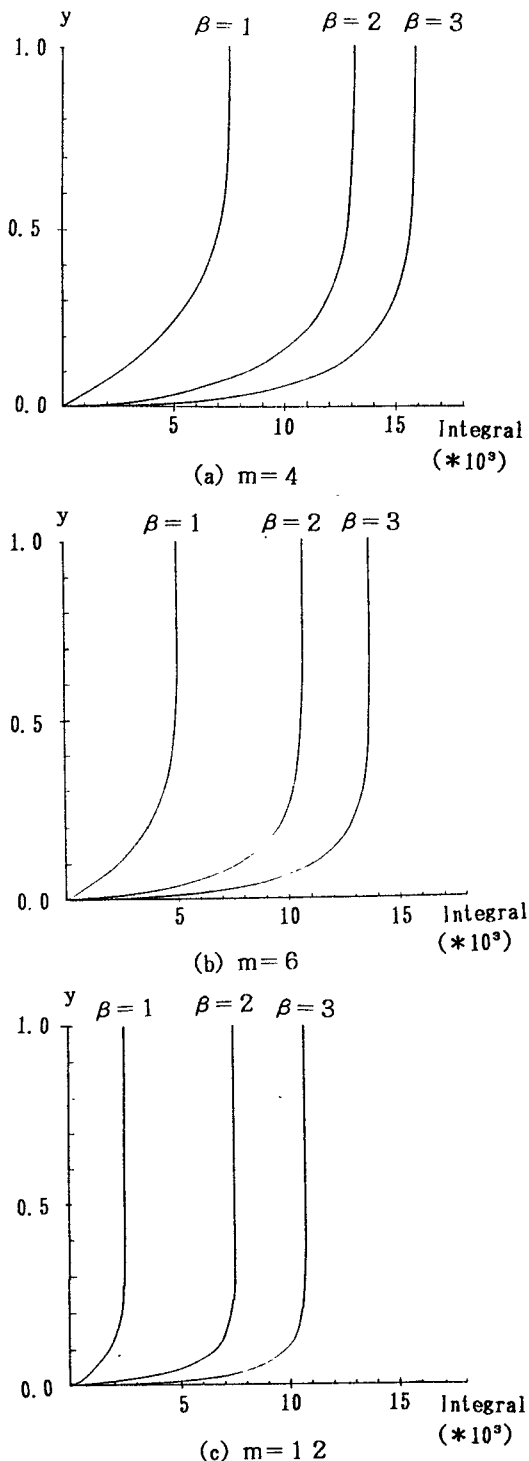


Fig. 1 Relations between time-oriented integral and rupture ratio y