

新潟大学大学院 神尾 忠弘  
新潟大学工学部 正会員 阿部 和久

1. はじめに 流体スロッシング問題は、速度ポテンシャル場に関する初期値境界値問題に帰着し、解析されることが多い。この場合、非線形性は液面形状など自由表面に関する値に限られるため、境界の離散化のみで解析可能な境界要素法の適用が比較的容易であり、多くの解析例が示されている<sup>1)</sup>。本研究では、境界要素スロッシング解析における解の特性と離散化誤差とに関する基礎的考察を行う。

2. 基礎式 図1に示す、自由表面 $\Gamma_f$ と壁面 $\Gamma_w$ とに囲まれた二次元流体 $\Omega$ を考える。流体を非粘性、非圧縮、非回転とすると、支配方程式および境界条件は、速度ポテンシャル $\Phi$ を用い次式で与えられる。

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (1)$$

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] - g\eta \quad (\text{on } \Gamma_f) \quad (2)$$

$$\frac{D\xi}{Dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (\text{on } \Gamma_f) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \bar{q} \quad (\text{on } \Gamma_w) \quad (4)$$

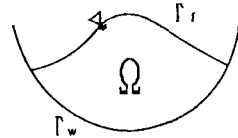


図-1 解析モデル

ここで $g$ は重力加速度、 $(\xi, \eta)$ は自由表面上の流体粒子座標、 $D/Dt$ はLagrange微分、 $\partial/\partial n$ は境界法線方向微分、 $\bar{q}$ は流束規定値である。

3. 解析アルゴリズム 式(1)~(4)に対し、本研究で用いた解析手順を図2に示す。図2で $[H]$ 、 $[G]$ は境界要素方程式の係数行列、 $\Delta t$ は時間ステップ幅、 $( )^k$ は第 $k$ ステップでの値である。なお、 $\Gamma_f$ 上では $\Phi^k$ が、 $\Gamma_w$ 上では $\bar{q}^k$ が既知とする。時間積分過程における $\Phi$ の微分 $\Phi_x, \Phi_y$ は流束 $q(=\partial\Phi/\partial n)$ と接線方向微分 $\partial\Phi/\partial s$ より求め、 $\partial\Phi/\partial s$ は隣接節点のポテンシャルの内挿より評価する。解析手順は主に境界要素方程式の求解と自由表面の時間積分とから成るが、図2のアルゴリズムからでは空間と時間方向の離散化と、解の安定性や精度との関係が明確でない。そこで、 $\Gamma_w$ 上で $\bar{q}=0$ となる微小振幅自由振動問題に基づき、解の基本的特性を調べる。 $\Gamma_w$ 上で $\bar{q}=0$ の場合、 $\Gamma_f$ 上の流束ベクトル $\{q\}$ は $\Gamma_f$ 上の $\{\Phi\}$ によって次式で与えられる。

$$\{q\} = [A] \{\Phi\} \quad (5)$$

ここで $[A]$ は境界要素方程式に関連して得られる正方行列である。 $[A]$ は一般に非対称密行列であるが、 $\Omega$ 内の流体の運動エネルギーが常に非負であることにより、 $[A]$ の固有値 $\lambda_i$ は非負(半正定値)であり、次式が成り立つ。

$$[A] \{\Phi_i\} = \lambda_i \{\Phi_i\} \quad (\lambda_i = 0, \lambda_i > 0 \quad i=2, \dots, N) \quad (6)$$

ただし、 $N$ は自由水面節点自由度、 $\{\Phi_i\}$ は実固有ベクトルである。式(5)、(6)より、 $\Gamma_f$ 上の $\Phi, q, \eta$ の節点値ベクトルは $\{\Phi_i\}$ を用いそれぞれ次式で表される。

$$\{\Phi\} = \sum_{i=2}^N a_i \{\Phi_i\}, \quad \{q\} = \sum_{i=2}^N a_i \lambda_i \{\Phi_i\}, \quad \{\eta\} = \sum_{i=2}^N \frac{1}{2} \lambda_i \{\Phi_i\} \quad (7)$$

ここで $a_i, \lambda_i$ はスカラー量である。

式(7)より、線形自由振動の場合の解の挙動が、上述の各モードごとに議論でき、図2中の積分スキームの場合は次の漸化式に帰着することがわかる。

$$\begin{Bmatrix} a_i^{k+1} \\ b_i^{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \bar{\omega}_i^2 \Delta t^2 & -\Delta t \\ \bar{\omega}_i^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_i^k \\ b_i^k \end{Bmatrix} \quad (b_i = g \xi_i, \bar{\omega}_i^2 = g \lambda_i) \quad (8)$$

4. 空間方向の離散化誤差 3.の自由振動問題で、各モードにおける流束は $q_i = \lambda_i \Phi_i$  ( $\lambda_i = \omega_i^2/g$ )と与えられる。一方、境界要素解は式(7)より $\lambda_i \{\Phi_i\}$ で与えられた。そこで空間方向の離散化と精度との関係を節点値ベクトルの $L_2$ ノル

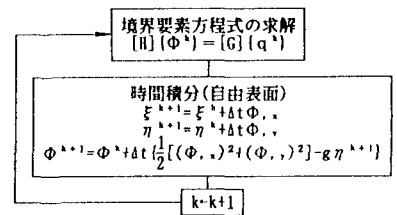


図-2 解析手順

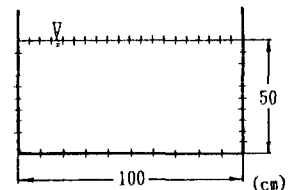


図-3 領域形状と離散化方法

$\|\lambda\phi - \lambda\phi\|$ に基づき評価した。領域形状と離散化方法を図3に示す。境界要素方程式には、ポテンシャルに関する積分方程式に基づき、0-次要素によるもの(UU<sub>0</sub>)、1-次要素によるもの(UU<sub>1</sub>)、およびΓ<sub>r</sub>上で流束、Γ<sub>w</sub>ではポテンシャルに関する積分方程式を用い、0-次要素で離散化したもの(UQ<sub>0</sub>)の3ケースを対象とした。各ケースにおける固有モードと精度との関係を図4に示す。図4の横軸は要素長hを各固有モードにおける波長Lで無次元化した値で示したが、自由表面10分割における各モードでの誤差がh/Lによる規格化の下で20分割の結果とほぼ一致したことから、誤差はh/Lに基づいて議論できることがわかった。図4より、h/L<0.17ではUQ<sub>0</sub>による精度がUU<sub>0</sub>よりも良く、収束次数も一次要素とほぼ等しいことがわかる。ポテンシャルと流束の積分方程式の混用は通常なされることが無いが、解析精度に関し有利であることが確かめられる。

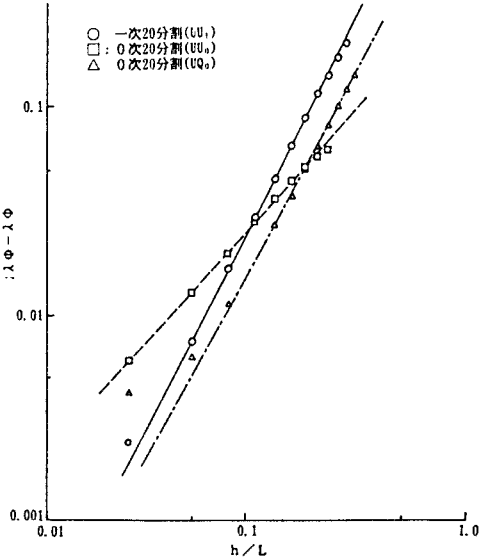


図-4 空間方向への離散化と精度の関係

5. 時間積分精度 式(8)の積分スキームは条件安定で、位相のずれ等を容易に知ることができる。しかし、本研究で0-次要素を用いる場合、要素中央の選点での境界値を境界要素法より求め、それに基づき要素端点でのポテンシャル増分や液面形状を計算しており、その過程でモード間の変換が生じ、4.での議論が厳密には成り立たない。また、壁面で流束が規定される場合に時間ステップ幅が精度に及ぼす影響を予め把握することも重要である。ここでは図3の容器を、次式のように水平加振した際の解析結果に基づき、Δtと精度との関係を調べる。

$$X(t) = A_m \sin(\omega t) \tag{9}$$

ここでX(t)は左右鉛直壁の水平変位、A<sub>m</sub>は振幅、ωは加振円振動数である。A<sub>m</sub>=5\*10<sup>-4</sup>(m)、ω=5rad/sec(T=1.257sec)、Δt=0.025secにおけるUU<sub>0</sub>、UQ<sub>0</sub>での右壁面の水面変化を理論解と共に図5に示す。また、Δt=0.1、0.05、0.025secでの自由水面応答を次のノルムに基づき比較した結果を表-1に示す。

$$NORM = \{ \sum (\eta_e - \eta_c)^2 / \sum (\eta_c)^2 \}^{1/2} \tag{10}$$

ここでη<sub>e</sub>、η<sub>c</sub>は理論解と計算結果であり、和はΓ<sub>r</sub>上の全節点、全ステップに対してとる。なお、Γ<sub>w</sub>上の流束は式(9)で与えられる各時間ステップでの壁面位置の変化量より、差分に基づき評価した。図5と表-1より、UU<sub>0</sub>、UQ<sub>0</sub>共、Δtによる誤差の減少傾向はほぼ等しく、Δt=0.025sec(Δt/T≒0.02)で概ね良好な結果が得られていることがわかる。

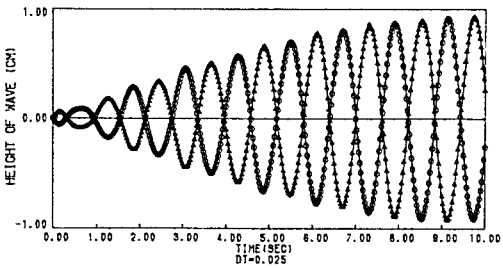


図-5 理論解と計算結果(○:UU<sub>0</sub>, △:UQ<sub>0</sub>)

表-1 Δtに対するノルム

| Δt \            | 0.1 (s) | 0.05 (s) | 0.025 (s) |
|-----------------|---------|----------|-----------|
| UU <sub>0</sub> | 0.2915  | 0.0986   | 0.0480    |
| UQ <sub>0</sub> | 0.2792  | 0.0919   | 0.0469    |

<参考文献> 1) Nakayama, T.: Boundary element analysis of nonlinear water wave problems, Int. J. Num. Meth. Engng., vol. 19 (1983) pp. 953-970.