

(I - 24) フーリエ変換を用いる過渡応答解析での初期条件について

(株) 間組 技術研究所 正会員 松原 勝己

1. まえがき

一般に、地盤震動解析の問題で過渡応答を求める際には、複素内部減衰や振動数依存性を有する逸散減衰の取扱いが容易なことから、SHAKEあるいはFLUSH等のプログラムに代表されるように、まず振動数領域での解を求め、それをFFTにより時刻歴に変換して応答を計算することが多い。一方、上部構造の震動解析では、モード合成法に代表されるような直接に時間領域で時刻歴を求める解法が多用されている。この方法では、初期条件、すなわち時刻ゼロ（外力が作用し始める時刻）での変位と速度を指定して時刻歴応答が計算される。ところが、先のフーリエ変換を用いて過渡応答を求める方法では、初期条件の指定は陽な形では現れない。一般に、振動系の応答は、人力と振動系の両者の特性に関係するので、結果的に計算される応答は、人力の特性（フーリエスペクトル）と振動系の性質（伝達関数）の両者に依存していると考えられる。本報では、振動系としては、フォークト型の減衰を有する一自由度系を取り上げ、また人力については、正弦波、矩形波およびインパルスの条件を設定し、人力の特性が初期条件にどのようにかわるかを考察した。

2. フォークト型の減衰を有する一自由度系の伝達関数

図-1に示す様なフォークト型の減衰を有する一自由度系の運動方程式は、

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{y}(t) \quad (1)$$

の様に表される。ここに、 m ：質量、 c ：減衰係数、 k ：バネ定数、 x ：質量 m の相対変位、 $\ddot{y}(t)$ ：地動加速度であり、上つきのドットは一階時間微分を表す。

ここで、 $k/m = \bar{\omega}^2$ 、 $c/m = 2h\bar{\omega}$ ($\bar{\omega}$ ：固有円振動数、 h ：フォークト型の減衰定数)と置けば、

$$\ddot{x} + 2h\bar{\omega}\dot{x} + \bar{\omega}^2 x = -\ddot{y}(t) \quad (2)$$

$x = X e^{i\omega t}$ (X ： x の複素フーリエ振幅)と置いて、振動数領域で書けば、 $\ddot{x} = -\omega^2 X$ 、 $\dot{x} = i\omega X$ より

$$X = H(\omega) \cdot \ddot{Y} \quad , \quad H(\omega) = - \frac{1}{\bar{\omega}^2 - \omega^2 + 2i h \bar{\omega} \omega} \quad (3)$$

ここに、 $H(\omega)$ は、フォークト型の減衰を有する一自由度系の伝達関数、 Y は $y(t)$ の複素フーリエ振幅であり、 $\ddot{Y} = -\omega^2 Y$ である。式(3)より、インパルス応答 $h(t)$ は、

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega = - \frac{1}{\sqrt{1-h^2}} \frac{1}{\bar{\omega}} e^{i\bar{\omega} t} \sin \sqrt{1-h^2} \bar{\omega} t \quad (4)$$

(ただし $t > 0$ 、 $t < 0$ ではゼロ)

3. フォークト型の減衰を有する一自由度系の初期条件について

いま、人力 $f(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega)$ とすれば、応答 $g(t)$ は、伝達関数 $H(\omega)$ を介して次の様に書ける。

$$g(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (5)$$

ここに、 $H(\omega)$ は、式(3)より

$$H(\omega) = \frac{1}{(\omega - \alpha_1)(\omega - \alpha_2)} \quad , \quad \alpha_1 = (\sqrt{1-h^2} + i h) \bar{\omega} \quad , \quad \alpha_2 = (-\sqrt{1-h^2} + i h) \bar{\omega} \quad (6)$$

したがって、応答 $g(t)$ および $\dot{g}(t)$ の初期値は

$$g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) F(\omega) d\omega \quad , \quad \dot{g}(0) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega H(\omega) F(\omega) d\omega \quad (7)$$

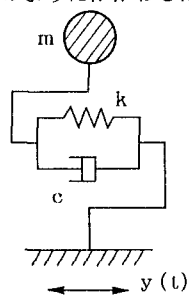


図-1 一自由度モデル

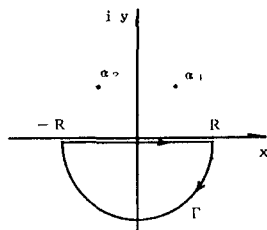


図-2 積分経路

式(7)の第一式を評価するために、 $\phi_1(z) = (1/2\pi) H(z) F(z)$ 、 $I_1 = \int_C \phi_1(z) dz$ ($z=x+iy$) とおき、積分路 c として、図-2 のような経路を考える。

いま、 $I_m z \leq 0$ で、 $F(z)$ が正則であると仮定すれば、式(6)より $H(z)$ についても $I_m z \leq 0$ で正則であるから、留数定理より、 $(1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) F(\omega) d\omega + \int_{\Gamma} \phi_1(z) dz = 0$ (8)

Γ に沿う積分は、 $z = R e^{i\theta}$ とおけば、 $dz = R i e^{i\theta} d\theta$ より

$$\int_{\Gamma} \phi_1(z) dz = \int_0^{-\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{R i e^{i\theta}}{R^2 e^{2i\theta} - (\alpha_1 + \alpha_2) R e^{i\theta} + \alpha_1 \alpha_2} F(R e^{i\theta}) d\theta \quad (9)$$

ここで、 $I_m z < 0$ で、 $|z| \rightarrow \infty$ の時 $F(R e^{i\theta}) \rightarrow 0$ と仮定すれば、 $R \rightarrow \infty$ の時上の積分値はゼロになる。

$$\text{したがって、} (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) F(\omega) d\omega = 0 \quad (10)$$

同様に、式(7)の第二式を評価するために、 $\phi_2(z) = (i/2\pi) z H(z) F(z)$ 、 $I_2 = \int_C \phi_2(z) dz$ ($z=x+iy$)

とおき、積分路 c として、図-2 と同じ経路を考える。式(8)と同様に、

$$(i/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \omega H(\omega) F(\omega) d\omega + \int_{\Gamma} \phi_2(z) dz = 0 \quad (11)$$

Γ に沿う積分は、

$$\int_{\Gamma} \phi_2(z) dz = \int_0^{-\pi} \frac{-1}{2\pi} \cdot \frac{R^2 e^{2i\theta}}{R^2 e^{2i\theta} - (\alpha_1 + \alpha_2) R e^{i\theta} + \alpha_1 \alpha_2} F(R e^{i\theta}) d\theta \quad (12)$$

$$R \rightarrow \infty \text{ の時、上の積分値はゼロとなり、式(10)と同様に、} (i/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \omega H(\omega) F(\omega) d\omega = 0 \quad (13)$$

式(7)、(10)および(13)より、 $g(0) = \dot{g}(0) = 0$ 。以上より、振動系がフォークト型の減衰を有する一自由度系の場合、入力 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ に対し、 $I_m z \leq 0$ で $F(z)$ が正則であり、 $I_m z < 0$ で $|z| \rightarrow \infty$ の時 $F(z) \rightarrow 0$ であれば、応答 $g(t)$ は、 $g(0) = \dot{g}(0) = 0$ となることがわかる。

4. いくつかの入力条件に対する応答

まず、入力が有限長sine波すなわち、式(1)の $y(t)$ が、 $\ddot{y}(t) = \sin \omega_0 t$ (ただし $0 \leq t \leq t_0$ 、それ以外はゼロ) のときを考える。ここに、 ω_0 は入力の円振動数である。 $\ddot{y}(t)$ のフーリエ変換は、

$$F(\omega) = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \left[1 - \frac{\omega + \omega_0}{2\omega_0} e^{-i(\omega - \omega_0)t_0} + \frac{\omega - \omega_0}{2\omega_0} e^{-i(\omega + \omega_0)t_0} \right] \quad (14)$$

式(13)より、 $F(z)$ は、 $z = \pm \omega_0$ で特異性を有するが、 $z = \pm \omega_0$ の周りの留数値はゼロである。また、 $I_m z < 0$ で $|z| \rightarrow \infty$ の時 $F(z) \rightarrow 0$ となることから、応答は、ゼロ初期条件を満足する。

次に、入力が矩形波すなわち、式(1)の $\ddot{y}(t)$ が、 $\ddot{y}(t) = 1$ (ただし $0 \leq t \leq t_0$ 、それ以外はゼロ) のときを考える。 $\ddot{y}(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ は、 $F(\omega) = (1/i\omega) [1 - e^{-i\omega t_0}]$ (15)

式(15)より、 $F(z)$ は、 $z = 0$ で特異性を有するが、 $z = 0$ の周りの留数値はゼロである。また、 $I_m z < 0$ で $|z| \rightarrow \infty$ の時 $F(z) \rightarrow 0$ となることから、応答は、ゼロ初期条件を満足する。

最後に、入力がインパルスすなわち式(1)の $\ddot{y}(t)$ が、 $\ddot{y}(t) = \delta(t)$ の場合を考える。この時、 $\ddot{y}(t)$ のフーリエ変換は $F(\omega) = 1$ となる。この場合、式(9)の積分はゼロとなるが、式(12)の積分はゼロにならない。すなわち、

$$\dot{g}(0) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{-\pi} \frac{R^2 e^{2i\theta}}{R^2 e^{2i\theta} - (\alpha_1 + \alpha_2) R e^{i\theta} + \alpha_1 \alpha_2} d\theta = \frac{1}{2\pi} [0]_0^{-\pi} = -\frac{1}{2} \quad (16)$$

これは、式(4)からもわかるように、速度のインパルス応答 $\dot{h}(t)$ が時刻ゼロで不連続となることと関係している。

5. あとがき

本報では、フォークト型の減衰を有する一自由度系を対象として、フーリエ変換を用いる過渡応答解析での初期条件を、いくつかの入力条件に対して検討した。その結果、インパルスのような特別な場合を除いて、通常の地震動のように、ゼロ値から始まる入力に対しては、初変位ゼロ、初速度ゼロの条件を満足することが明らかになった。今後は振動系の性質(伝達関数)が初期条件に及ぼす影響を検討してゆく予定である。