（Ⅰ－12） 骨組部材の非線形つり合い径路の追跡法に関する一考察

早大理工・院　学生員　○岡田　淳
早大理工学部　学生員　石川　智巳
早大理工土木　正員　依田　照彦

1．はじめに

実際の構造物が過度に変形することは設計上ありえないが、特別な場合には大きな変位が生じることも考えられる。解析的にみれば、非線形現象をいかに正確にとらえるかが、構造解析において重要となる。さらに、コンピュータの発達した現在では、非線形解析のアルゴリズムの効率化を図ることの意義は大きいと思われる。非線形つり合い径路を効率的に追跡する上でまず考えなければならないことは、つり合い径路上の特異点（分岐点・極限点）の対応策とルーピングに代表される複雑なつり合い径路の追跡方法であろう。本報告は、骨組部材の幾何学的非線形問題を取り上げ、汎用性に富んだ弧長増分法を用いて、非線形つり合い径路を効率的に追跡する方法について述べたものである。

2．非線形計算のアルゴリズム

2．1 弧長増分法の定式化

弧長増分法における弧長の定義は、次式で表される。

$$\Delta s^2=\Delta\lambda^2+\{\Delta d\}^T\{\Delta d\} \tag{1}$$

ここに、Δs は弧長増分量、$\Delta\lambda$ は荷重増分パラメータ、$\{\Delta d\}$ は変位増分である。また、荷重増分 $\{\Delta P\}$ と変位増分 $\{\Delta d\}$ は、基準荷重 $\{P_0\}$ と基準変位 $\{d_0\}$ を用いて

$$\{\Delta P\}=\Delta\lambda\{P_0\} \tag{2}$$

$$\{\Delta d\}=\Delta\lambda\{d_0\} \tag{3}$$

とかける。式（1），（3）を用いて、荷重増分パラメータは次式のように求まる。

$$\Delta\lambda=\pm\sqrt{\frac{\Delta s^2}{1+\{d_0\}^T\{d_0\}}} \tag{4}$$

ここで符号の正負の決定が問題になるが、この符号の制御方法については、次節で述べる。

2．2 特異点計算のアルゴリズム

（a）ルーピング問題について[1]

ルーピングは、かなり入り組んだ閉曲線を描く複雑な非線形挙動である。この曲線を追跡するためには、つり合い曲線が鋭角に折り返すような点をすべて感知するような制御方法をとらなければならない。そこで、荷重増分パラメータ $\Delta\lambda$ の符号の決定を、接線剛性マトリックスの逆行列をとる際の負のピボットの個数の変化に着目して行った。すなわち、負のピボットの個数が変化するごとに $\Delta\lambda$ の符号を反転させるというものである。以後の径路追跡は、通常の弧長増分法に従うことになる。

（b）極限点について

図1は極限点と分岐点の両方が存在する系を模式的に示したものである。図より、基準荷重 $\{P_0\}$ と、それに対応する基準変位 $\{d_0\}$ のなす仕事の正負は、極大点（極小点）より前の点では正（負）、後の点では負（正）となり $\Delta\lambda$ の符号に一致している。これを符号の正負決定に用いれば、式（4）は

$$\Delta\lambda=\frac{\{P_0\}^T\{d_0\}}{|\{P_0\}^T\{d_0\}|}\sqrt{\frac{\Delta s^2}{1+\{d_0\}^T\{d_0\}}} \tag{5}$$

となり、自動的に極限点を超えてつり合い曲線の追跡を行うことができる[2]。この制御方法の特徴は、極限点のみに反応するという点である。すなわち、図1からも分かるように負のピボットの個数の変化による方

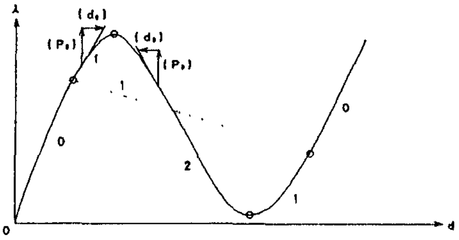

図１　仕事の正負と負のピボットの数

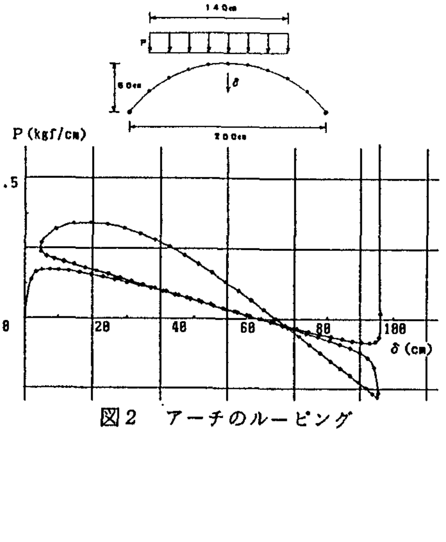

図2　アーチのルーピング

法を用いて符号を決定しようとしても、極限点と分岐点が共存するような系においては、正しい情報が得られず[3]、仕事の正負による判別方法と負のピボットの数の変化に着目する方法とを併用しなければならない。

（c）分岐点について

分岐問題を要約すると、①分岐点の発見方法，②分岐方向の評価の２点である。前者については、負のピボットの個数及び式（５）の両方を用いて発見する。すなわち、負のピボットの数が変化し、式（５）の仕事量の符号が変化しなければ、分岐点であると認識できる。後者については、固有値解析によって分岐後の変位モードを求め、それに対応する外荷重を計算し、次にこれを分岐点に達した時点で導入し、分岐後ただちに取り除く。それ以後は、通常の弧長増分法を適用する[4]。

３．数値解析例

計算の対象として、まず図２に示すような部分分布荷重を受けるライズ／スパン比１／４の円弧アーチの解析を試みる。つり合い曲線は、クラウンの鉛直変位と荷重との関係を示したものである。かなり非線形性の強い曲線であるが、特別な考慮を必要とすることなく解析を行うことができた。次の例は、径路上に分岐点と極限点が存在する偏平ラーメン（図３）の問題である[5]。図４は荷重の大きさと荷重作用点の鉛直変位の関係を、図５は荷重の大きさと支点の水平反力の関係を示したものである。図において、Ｏ－Ｂ－Ｃ－Ｅは対称モード，Ｏ－Ａ－Ｄ－Ｅは非対称モードのつり合い曲線を表している。分岐点Ａや極限点Ｂ，Ｃなどの特異点の通過も問題なく、対称モードと非対称モードの合流点Ｄ以降の後座屈径路の追跡もスムーズである。最後にエラスティカの例を図６に示す。大変形問題であるにもかかわらず、分岐点から後座屈径路に至るまで、楕円積分による理論解とよく一致していることがわかる。なお、これら全ての数値計算例について、初期不整は与えていない。

４．あとがき

本報告は完全系つり合い径路上にある極限点や分岐点を正しく判断し、つり合い径路を効率的かつ自動的に追跡できる非線形計算のアルゴリズムを汎用的な弧長増分法を基礎に、提案したものである。本手法によれば、通常の非線形解析において、特別な問題が生じることはないと思われる。

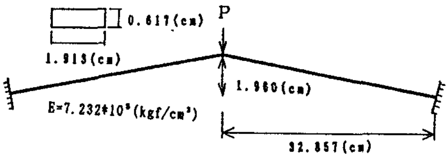

図３　偏平ラーメンの問題

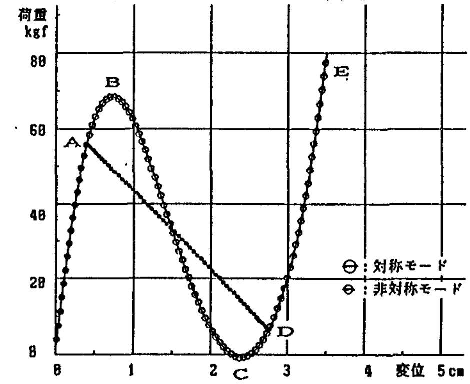

図４　載荷点の変位

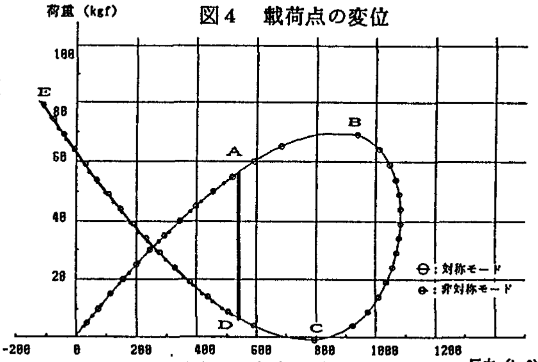

図５　支点の水平反力

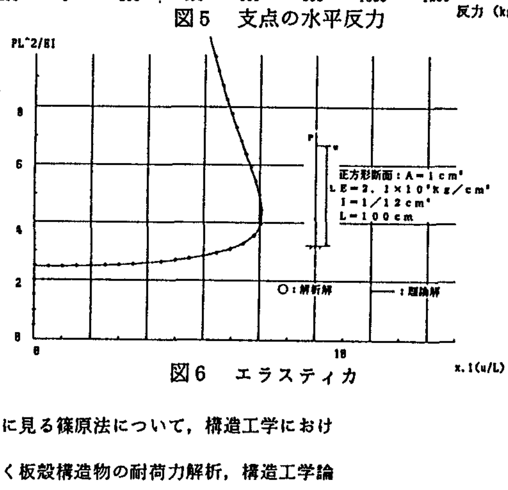

図６　エラスティカ

参考文献

１）藤井文夫，今井康幸：アーチのルーピングつり合い曲線の追跡に見る篠原法について，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集　第１２巻，昭和６３年７月

２）末武義崇，工藤浩司，平嶋政治，依田照彦：弧長増分法に基づく板殻構造物の耐荷力解析，構造工学論文集，Ｖｏｌ　３４Ａ，昭和６３年３月

３）林正：多元連立非線形方程式の数値計算法，長岡技術科学大学計算機センターニュース　Ｖｏｌ　３，Ｎｏ．２，１９８５年１２月

４）岡田淳，依田照彦：弧長増分法による完全系つり合い径路の追跡，第４０回応用力学連合講演会　Ｎ０．１４２，平成２年１２月

５）吉田裕：有限要素法による幾何学的非線形構造解析法の現状と課題，土木学会論文集，第３７４号／Ｉ－６，１９８６年１０月