

(I-10) せん断変形を考慮した積層構造の振動解析

早稲田大学大学院 学生員 ○坪田 浩昭
早稲田大学理工学部 学生員 村上 初央
早稲田大学理工学部 正 員 依田 照彦

1. はじめに

鉄筋コンクリート (RC) やプレストレストコンクリート (PC) は、コンクリートと鉄筋あるいは鋼棒から成る複合構造であるが、ガラス繊維やカーボン繊維などによる繊維強化が各方面で採用されるようになり、建設分野でも繊維強化コンクリート (FRC) を中心として各種複合材料の強度特性や耐久特性に関する研究が進んでいる¹⁾。複合材料は所要の特性をもたせるように最適設計できる材料であり、土木構造物への応用が期待されているが、現在のところ設計手法の確立も含めて研究段階であるといえる。本論文では、複合材料のうちでも特性の異なる材料が層状に組み合わせられた、長方形断面を有する積層構造複合部材の振動特性を評価することを目途に、有限要素法を用いて振動解析を行った結果を報告する。

2. 断面特性の評価について

複合合成部材の設計では、一般に、曲げによる歪は直線分布すると仮定している²⁾。この仮定に基づけば軸力 $N=0$ の条件から、図心軸からの中立軸位置とは

$$z = \frac{\sum_{i=1}^n (E_i \int_{z_{i-1}}^{z_i} z dz)}{\sum_{i=1}^n (E_i \int_{z_{i-1}}^{z_i} dz)} \quad \dots (1)$$

n : 層数
 E_i : i 層の弾性係数
 z_{i-1} : i 層の図心軸に関する下段座標
 z_i : i 層の図心軸に関する上段座標
 z : 図心軸に関する座標

と書ける。

等価伸び剛性 (EA)、等価曲げ剛性 (EI)、等価せん断剛性 (GkA) は、断面力表示の歪エネルギーを考慮することにより評価する。まず等価伸び剛性であるが、この場合、歪は各層とも等しいので断面に作用している軸力を N で表すと i 層内での応力 σ_{ni} は

$$\sigma_{ni} = \frac{E_i}{\sum_{i=1}^n (E_i A_i)} N \quad \dots (2) \quad A_i : i \text{ 層の断面積}$$

となる。 i 層内での、軸力による歪エネルギーを U_{Ni} とすると N による歪エネルギー U_N は

$$U_N = \sum_{i=1}^n U_{Ni} \quad \dots (3)$$

と書けるので、

$$U_N = \sum_{i=1}^n \left(\int_0^L \frac{N^2}{2} \left\{ \frac{E_i A_i}{(\sum_{i=1}^n (E_i A_i))} \right\}^2 ds \right) \quad \dots (4) \quad s : \text{部材長}$$

となる。したがって、等価伸び剛性 (EA) は、

$$(EA) = \frac{(\sum_{i=1}^n (E_i A_i))^2}{E_1 A_1 + E_2 A_2 + \dots + E_n A_n} = \sum_{i=1}^n (E_i A_i) \quad \dots (5)$$

と表される。

次に等価曲げ剛性を求める。 i 層の中立軸まわりの断面 2 次モーメントを I_i とすると、断面に作用しているモーメント M による曲げ応力 σ_i は

$$\sigma_i = \frac{E_i}{\sum_{i=1}^n (E_i I_i)} M z' \quad \dots (6) \quad z' : \text{中立軸に関する座標}$$

となる。歪エネルギーに関して、先ほどと同様に考えると、等価曲げ剛性 (EI) は、

$$(EI) = \frac{(\sum_{i=1}^n (E_i I_i))^2}{E_1 I_1 + E_2 I_2 + \dots + E_n I_n} = \sum_{i=1}^n (E_i I_i) \quad \dots (7)$$

と表される。

せん断剛性を評価するために、曲げによるせん断応力の分布を求める。断面に作用しているせん断力を Q とすると、 $dM/dx = Q$ より i 層内でのせん断応力 τ_i の分布式は

$$\tau_i = \frac{Q}{(EI)} \left\{ \sum_{j=1}^i (E_j \int_{z_{j-1}}^{z_i} \eta d\eta) + E_i \int_{z_i}^{z_{i+1}} \eta d\eta \right\} \quad \dots (8)$$

と導かれる。これは

$$\tau_i = k_i (z') \frac{Q}{A} \quad \dots (9) \quad b : \text{断面幅} \quad a_i : i \text{ 層の中立軸に関する下段座標} \\ A : \text{断面積} \quad a_{i+1} : i \text{ 層の中立軸に関する上段座標}$$

と書くこともできるので

$$\frac{1}{k_i} = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{(k_i (z'))^2}{A} dA_i = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{(k_i (z'))^2}{A} b dz' \quad \dots (10)$$

とおくことにより歪エネルギーを考えると、 i 層のせん断弾性係数を G_i とすれば、等価せん断剛性 (GkA) は、

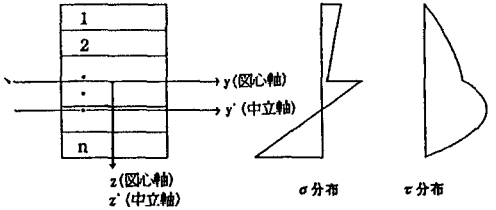


図1 積層断面の曲げによる応力分布

表1 材料特性

材料	弾性係数 kg/cm^2	せん断弾性係数 kg/cm^2	密度 kg/cm^3	備考
I	$2.10e6$	$8.10e5$	$8.01e-6$	Steel 特性
II	$2.80e5$	$1.20e5$	$2.45e-6$	短繊維強化
III	$3.00e5$	$1.29e5$	$2.80e-6$	Concrete 特性
IV	$2.10e6$	$8.10e5$	$8.01e-6$	Steel 特性

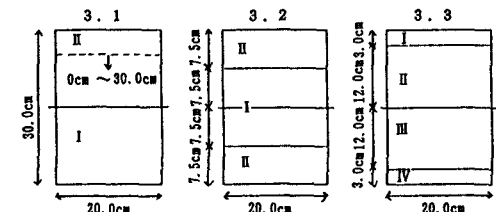


図2 解析した積層構造の断面構成

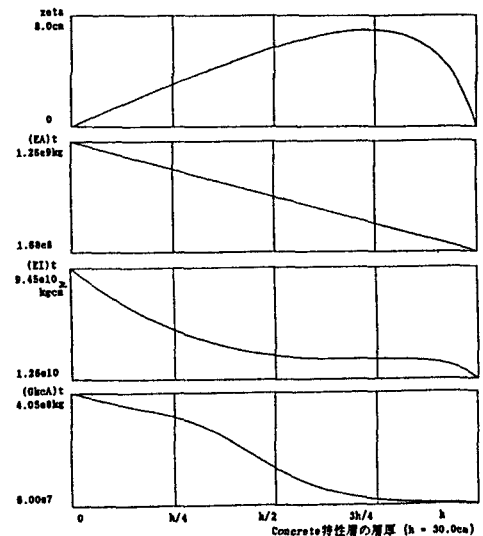


図3 層厚の変化にともなう断面特性の変化

$$(GkcA)_i = \frac{G_1 k c_1 G_2 k c_2 G_3 k c_3 \cdots G_n k c_n}{\sum_{j=1}^n (G_1 k c_1 G_2 k c_2 \cdots G_n k c_n / G_j k c_j)} A \cdots (11)$$

と表される。式(8), (9), (10)より、 kc_1 については

$$\frac{1}{kc_1} = \frac{A}{(EI)_2} \left[\int_{1,1}^{1,n} \left(\sum_{j=1}^n [E_j \int_{j,1}^{j,n} \eta d\eta] + E_j \int_{j,1}^{j,n} \eta d\eta \right)^2 b dz' \cdots (12) \right]$$

となる。(以上、図1参照)

質量系では、単位長に対する評価した質量 $(A\rho)_i$ 、および回転慣性モーメント $(I\rho)_i$ は

$$(A\rho)_i = \sum_{j=1}^n (A_j \rho_j) \cdots (13)$$

$$(I\rho)_i = \sum_{j=1}^n (I_j \rho_j) \cdots (14)$$

ρ_i : i層の密度

と表される。

3. 解析結果

3.1 2層複合部材の、層厚の変化にともなう振動特性の変化
断面寸法を一定として、構成する2種の材料の層厚の変化にともなう断面特性の変化を図3に示す。さらに、図4に、スパン長を $L=500.0\text{cm}$ としたシンプルビームの、Bernoulli-Euler理論振動周期およびせん断による変形と回転慣性を考慮するTimoshenko理論の近似理論周期³⁾(4次モード)の変化を示す。高次モードになるにつれてせん断変形および回転慣性の影響は大きくなるのであるが、その程度は上下層の層厚比とともに変化していることがわかる。

3.2 はり要素を用いた、Timoshenko理論に基づく3層複合部材のモード解析

断面特性を2.で示したように評価すれば、はり要素を用いて振動特性を調べることができる。振動解析に於いて、せん断変形と回転慣性も考慮する場合には、節点まわりの回転慣性を考慮して質量マトリックスを作らなければならない。節点から部材軸方向距離 r の位置で、 r を固定して断面高方向の分布を考慮すると、回転慣性には各層の密度に対して $(I_1 + r^2 A_1)$ が重みとして関係してくる。したがって、集中回転慣性 IM は次のように表される。

$$IM = \int_0^{1/2} \frac{\sum_{i=1}^n [(I_1 + r^2 A_1) \rho_i]}{\sum_{i=1}^n (I_1 + r^2 A_1)} A dr \cdots (15) \quad I: \text{要素長}$$

以上をふまえて、Jacobi法によるモード解析を行った結果を図5に示す。このように、はり要素を用いてせん断変形と回転慣性も考慮した複合部材の振動解析を行うことができる。

3.3 材料の引張破壊を考慮した、4層複合部材の振動解析

本論文で展開した理論によれば、部材の一部が破壊して応力を負担しなくなる場合の解析も可能となる。 $L=800.0\text{cm}$ としたシンプルビームをBernoulli-Euler理論に基づいてモード解析すると、1次周期は 8.266e-2sec であった。破壊を考慮せずに1次モードで入力すると図6の様に振動は発散する。内側2層の引張破壊を考慮すると、図7のように、断面特性が変わり発散挙動がおさまってゆく様子がわかる。引張強度は、材料IIが 80.0kg/cm^2 、材料IIIが 100.0kg/cm^2 とした。層要素中の縦線は破壊したことを示す。解析にはNewmarkの β 法($\beta=0.25$, $\Delta t=1.0\text{e-3}$)を用いており、入力波の最大振幅は 3.0e3gal である。なお、図8に、対称性を考えて左側から5要素の等価曲げ剛性の時間的変化も示した。

4. まとめ

本論文では、長方形断面を有する積層構造複合部材の振動特性を評価することを目的に、はり要素を用いて振動解析を行った。この手法によればせん断変形や回転慣性の影響を考慮することができ、さらに破壊など局所的に特性が変化する場合も対応することが可能であり、積層構造複合部材の振動解析を的確に行うことができる。

<参考文献>

- 1) 例えば、岩本他：鋼代替繊維補強コンクリートの強度特性
土木学会第44回年次学術講演会講演概要集第5部, pp. 298-299.
- 2) 日本機学会編：先端複合材料, 技報堂出版, pp. 65-67.
- 3) S. P. Timoshenko, D. H. Young, W. Weaver, Jr 原著, 谷口 修・田村 章義 共訳：
新版 工業振動学, コロナ社, pp. 387-390.

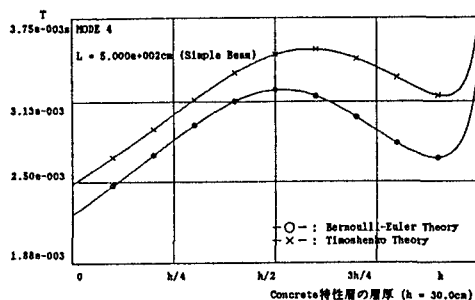


図4 振動周期の変化(4次モード)

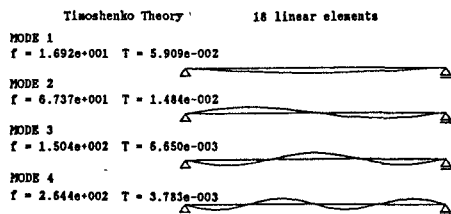


図5 はり要素を用いた複合部材のモード解析結果

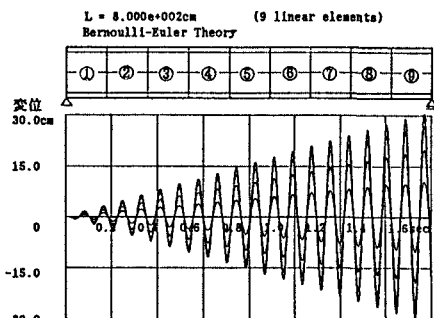


図6 破壊を考慮しない場合の1次モード振動

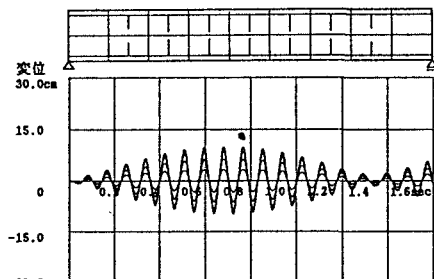


図7 破壊を考慮した場合の1次モード振動

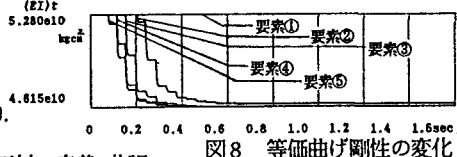


図8 等価曲げ剛性の変化