

早稲田大学理工学部 学生員 ○ 小林 実央
 早稲田大学大学院 学生員 小粥 康弘
 早稲田大学理工学部 正 員 末武 義崇
 早稲田大学理工学部 正 員 平嶋 政治

1. はじめに

箱桁の変形形状を解析する際には、本来その断面変形の影響を考慮し、各構成要素の薄板としての変形特性をも含めた形で解析することが必要である。特に大たわみ問題では、これを無視することができない。そこで筆者らは、箱桁を4枚の薄板の集成構造物とみなし、断面変形のみならず板面内の膜効果をも考慮した箱桁の幾何学的非線形解析を試みた。薄板の幾何学的非線形性の考慮については、von Kármánの平板理論を基にして板内部の基礎式および板と板との接続部における条件式を定式化した。数値計算に際しては差分法を用い、パーソナルコンピュータによって計算を実施した。また、得られた解析結果と、有限要素解との比較を行った。

2. von Kármánの平板理論¹⁾

本報告では、薄板の幾何学的非線形性の評価に関し、von Kármánの平板理論を適用している。von Kármánは、薄板のたわみが板厚と同程度(有限変位)になるものと考え、Kirchhoffの仮定に基づいて薄板問題に対する有限変位理論の定式化を行った。そして、薄板の幾何学的非線形問題に対する基礎方程式として、応力関数 F およびたわみ w を用いた表示を誘導した。しかしながら、箱桁解析における境界条件の適用の便を考慮すると、基礎方程式を、面内変位 u, v とたわみ w とで表示した次式を用いるのが適切である。

$$\nabla^4 w = \frac{1}{D} \left[q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad \left(D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] = 0 \quad (3)$$

ここで、 N_x, N_y, N_{xy} は、膜力であり、次式で与えられる。

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right], \quad N_y = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$N_{xy} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (4) \sim (6)$$

3. 接合辺における条件式

接合辺での条件式は以下の8本が考えられる。

(図1参照)

〔1〕 力の釣合条件式

- ① A面の膜力とB面の有効せん断力との釣合
- ② A面の有効せん断力とB面の膜力との釣合
- ③ 両面の面内せん断力の釣合
- ④ 両面の曲げモーメントの釣合

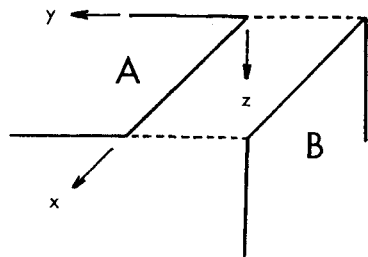


図1 接合辺を共有して隣接する板部材

〔2〕 変位の適合条件式

⑤ 板接合部における直角保持

⑥～⑧ 各座標軸方向についての変位の適合

なお、条件式の中に非線形項を含むものは、〔1〕の

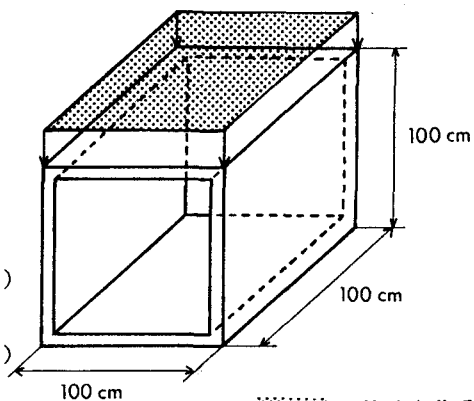
①～③ 式の3本で、以下に示すとおりである。

$$N_{yA} + \frac{\partial M_{xyB}}{\partial y} + Q_{yB} + N_{xyB} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yB} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial M_{xyA}}{\partial y} + Q_{yA} + N_{xyA} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yA} \frac{\partial w}{\partial y} - N_{yB} = 0 \quad (8)$$

$$N_{xyA} - N_{xyB} = 0 \quad (9)$$

(Q_y : 板厚方向せん断力, M_{xy} : 板のねじりモーメント)



：等分布荷重

図2 解析モデル

4. 解析手順

前節2. 3. に示した各条件式を差分法を用いて離散化し、得られた非線形多元連立代数方程式を、掃き出し法を用いた、繰り返し計算によって近似的に解く。その際に、式中の非線形項は右辺に移項し、線形化した代数方程式を解き、得られた近似解を逐次、右辺の非線形項に代入する直接反復法を採用した。

繰り返し計算は、第 N 近似解 u_N と第 $(N-1)$ 近似解 u_{N-1} との差の比率 $\|u_N - u_{N-1}\| / \|u_{N-1}\|$ ($\| \cdot \|$ は、Euclid内積ノルムを表す) が、 1×10^{-3} 未満になるまで実施した。

5. 解析モデル

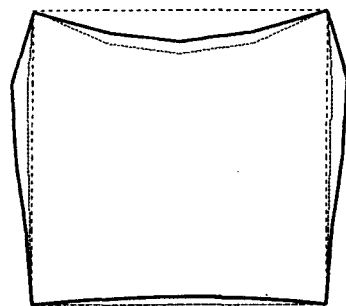
解析モデルを図2に、モデルの諸元を表1に示す。箱桁両端の境界条件は、全ての支持辺において3方向変位を拘束し、板としての曲げモーメントを0とした。差分に用いた分割は一辺を4分割(つまり一面16分割)とした。

6. 解析結果および考察

有限要素解との比較を、図3に示す。図は、桁中央における横断面の変形モードを図示したものである。図3から明かなように、差分解は有限要素解に比べ、上フランジのたわみを小さく、ウェブ、および下フランジのたわみを大きく、それぞれ評価する傾向にあり、両者の間には、著しい差異が認められる。この理由として次の二点が考えられる。1) 有限要素法では自由度の制約上、接合条件として直角保持条件等を考慮していない為、荷重の影響が差分法の場合ほど他の板に伝達されない。2) 差分解に際し、一辺4分割という荒い分割で計算している為、仮想点の値が内点の値に与える影響が極めて大きい。しかしながら、これまで大型コンピュータに頼っていた薄板集成構造物としての箱桁の解析を、パーソナルコンピュータにより、比較的容易に解析できたことの意義は大きい。

今後は差分法を用いた非線形解析における、分割数の影響について定量的な検討を行ってゆきたい。

表1 モデルの諸元		
Young率	E	$2.1 \times 10^8 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$
Poisson比	ν	0.3
板厚	h	1 (cm)
等分布荷重	q	0.5 (kg/cm ²)



----- 変形前
 ———— 差分解
 ————— 有限要素解

図3 有限要素解との比較 (倍率X20)

参考文献

- 1) Y. C. ファン: 固体の力学/理論、培風館、1970年