

(I-33) 主問題と双対問題のタブロー

群馬高専 正員 平田恭久

1. まえがき

著者は等式制約法と称する最適化手法の開発を進めてきており、線形計画法でのシンプレックス・タブローによる掃き出し計算の反復で最適解に収束する方法を完成させている。現段階では、双対問題のタブローを用いているが、SLPのように非線形計画問題を線形化して解く場合のタブローは主問題になる。ここでは、最適解の必要条件を満足するのに必要な諸量を示し、主問題のタブローについても同様の成果が得られるかどうかを考察してみる。考察の中心は、 $g \leq 0$ (制約条件の満足) と $\lambda \geq 0$ (有効な制約条件) を確保できるような掃き出し規則を作成することである。

2. 最適解の必要条件と探索

式(1)の最適化問題について、最適解での活性な制約式 g_m とその制約変数 x_m が選択できているなら、最適解での必要条件は式(2), (3)になる。 ∇_s は探索変数 x_s , ∇_m は制約変数 x_m についての微分を表し、 r は制約式の、 m は活性な制約式の個数である。式(2)は λ について線形であるが、 x について線形化すると式(4)になる。式(4)を解くと dx_s, dx_m, λ_m が得られるが、式(4)は dx で線形化しているので、 $dx \rightarrow 0$ に収束したときが解である。このとき式(3)が成立していれば最適解の必要条件は満足される。

式(4)について、 $\nabla_m L = 0$ となるように λ_m を定めれば $\nabla_m^2 L = 0$ であり、 $\nabla_s^2 L = I$ (単位行列) とすれば dx_s は式(5)になる。式(5)は最急勾配方向であり、 dx_s 方向に探索したときの g_m の変化は式(6)である。制約面上に乗っているためには、式(4)第3行の g_m に式(6)を代入した式が成立していなければならない。これより、探索変数の変化に伴う制約変数の変化は式(7)になる。探索を続けて $dx_s = 0$ になったとき、活性な制約面上に乗っていれば $dx_m = 0$ である。よって、 $dx \rightarrow 0$ に収束したことになり、式(2)は満足される。

3. 主問題と双対問題

等式制約法では図-2に示すタブローの掃き出し計算より、活性な制約面 g_m, x_m の選択、活性な制約面上に乗るための dx_m 、探索方向 dx_s とこれに伴う dx_{ms} 等を得ている。図-2は式(9)の λ についての線形計画問題のタブローであり、式(9)で $\nabla L = 0$ が成立すれば式(1)に対する双対問題になる。図-2の双対問題に関する掃き出し規則等は整備され、反復計算により最適解に到達できる。ここでは、図-1の主問題のタブローについても、同様の結果が得られるかどうかを検討してみる。なお、図-

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{subject to } g(x) \leq 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} \nabla_s L &= \nabla_s f + \nabla_s g_m^T \lambda_m = 0 \\ \nabla_m L &= \nabla_m f + \nabla_m g_m^T \lambda_m = 0 \\ g_m &= 0 \\ \lambda_m &\geq 0, \lambda_{r-m} = 0 \\ g_{r-m} &\leq 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla_s f + \nabla_s g_m^T \lambda_m + \nabla_s^2 L dx_s &= 0 \\ \nabla_m f + \nabla_m g_m^T \lambda_m + \nabla_m^2 L dx_m &= 0 \\ g_m + \nabla_m g_m dx_m &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

$$\dots\dots\dots (3)$$

$$\begin{aligned} dx_s &= -\nabla_s L \quad \dots\dots\dots (5) \\ g_{ms} &= \nabla_s g_m^T dx_s \quad \dots\dots\dots (6) \\ dx_{ms} &= -(\nabla_m g_m)^{-1} \nabla_s g_m dx_s \quad (7) \end{aligned}$$

	f	x_m	x_s	λ_m	λ_{r-m}
∇f	$f + \Delta f$	0_m^T	$-\nabla_s L$	$-\lambda_m^T$	0_{r-m}
g_m	Δx_m	I_m	$(\nabla_m g_m)^{-1} \nabla_s g_m$	$(\nabla_m g_m)^{-1} 0$	
g_{r-m}	$-g_{r-m}'$	0	C	B	I_{r-m}

図-1 主問題のタブロー

	f	g_m	g_{r-m}	Δx_m	x_s
g	$f + \Delta f$	0_m^T	$-g_{r-m}'$	Δx_m^T	0_s^T
x_m	λ_m	I_m	B	$-(\nabla_m g_m^T)^{-1}$	0
x_s	$\nabla_s L$	0^T	C	$-\nabla_s g_m^T (\nabla_m g_m^T)^{-1}$	I_s

図-2 双対問題のタブロー

$$\left. \begin{aligned} \min \Delta x^T \nabla f + f \\ \text{subject to } \nabla g \Delta x + \Delta g = -g \\ \Delta x \geq 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

1, 2は掃き出し後を示している。図-1は式(1)の最適化問題を線形化して、式(8)の線形計画問題とした場合のタブローであり、図-2の双対問題に対する主問題になっている。

4. 掃き出し規則

主問題と双対問題ではタブローでの位置は異なるが、探索の続行に必要な $\Delta x_m, \nabla_s L, -(\nabla_m g_m)^{-1} \nabla_s g_m$ が掃き出し計算より得られている。図-1のタブローでは $\lambda_{r-m} = 0$ になっており、 $g_m = 0$ とする Δx_m を求めていることから $g_m = 0$ である。図-2のタブローでは $g_m = 0$ になっており、 λ_{r-m} は非基底変数なので $\lambda_{r-m} = 0$ である。よって、 $\lambda_m \geq 0, g_{r-m} \leq 0$ が成立するような掃き出し規則があれば、活性な制約面上を探索していくことができる。

式(9)の双対問題には $\lambda \geq 0$ の条件があり、 $\max \lambda^T g + f$ で $g_i > 0$ を解消する。よって、シンプレックス法の掃き出し規則を準用できる。これに対し、式(8)の主問題を解いたのでは $\lambda \geq 0$ の条件が確保できない。よって、式(8)の主問題から離れて、図-1の主問題タブローで $\lambda \geq 0, g_{r-m} \leq 0$ が成立するような掃き出し規則を考案してみる。このようにして作られた軸要素の選択(ℓ 行 k 列)が式(10)である。比較のため、双対問題タブローでの軸要素の選択を式(11)に示す。式(10)の $a_{\ell j}, a_{\ell i}$ は図-1のC, Bの要素であり、 x_s 列と λ_m 列の n 個の列が選択の範囲である。行の選択は g_{r-m} 行の $r-m$ 個を対象にしている。式(11)の a_{jk} は図-2のB, Cの要素であり、 x_m 行と x_s 行の n 個の行が選択の範囲である。列の選択は g_{r-m} 列の $r-m$ 個を対象にしている。

5. 等式掃き出し

式(10), (11)の軸要素の選択により活性な制約面が得られるが、これだけでは実際の探索のとき不便であり、この点を双対問題タブローで説明する。式(9)第2行の右辺を $\nabla f \geq 0$ として探索を開始し、式(11)で軸要素を選択すると $\nabla_s L \geq 0$ が確保され、探索方向を式(5)とする $dx_s \leq 0$ になる。これは最適解を挟んで探索しているときに x_m と x_s の区分が変化することを意味している。よって、一定の g_m, x_m を選択して探索していくことが困難になり、 x_m と x_s の区分が変化することから、準Newton法、共役方向法で探索方向を算出するのに不都合が生ずる。このため、等式制約法では前回の g_m, x_m を指定する等式掃き出しと称する方法を採用しており、その流れを図-3に示す。 g_m, x_m を指定すると $\lambda \geq 0$ が満足されないことがあるので、このときは g_m のみを指定して x_m を選択する。

6. まとめ

等式制約法は式(9)の双対問題を解くことにより、活性な制約面と探索方向を得ていることから、図-2の双対問題タブローを採用してきた。SLPのように線形化して解く場合は式(8)の主問題になるので、主問題の通常の解き方とは別に $\lambda \geq 0, g \leq 0$ が成立するような軸要素の選択を考案しておけば、SLPと等式制約法とを混用したアルゴリズムを作成できるのではないかと考えた。この目的で考案したのが式(10)の軸要素の選択である。式(10)を用いて、双対問題タブローと同様の結果が得られる探索プログラムを作成するには、まだ若干の検討事項が残っている。

$$\left. \begin{aligned} \max \lambda^T g + f \\ \text{subject to} \\ -\nabla g^T \lambda + \nabla L = \nabla f \\ \lambda \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

●行の選択 $i=1, \dots, r$
 $-g_i < 0$ の ℓ 行を選ぶ
 ●列の選択
 $\nabla_s L_j / a_{\ell j}, j=1, \dots, n$
 $|\lambda_{m1} / a_{\ell i}|, i=n+1, \dots, n+r$
 について $\min$ の k 列を選ぶ
 ただし $-\nabla_s L_j / a_{\ell j} \geq 0$ であり、掃き出した変数列($\nabla_s L_j = 0$ かつ $a_{\ell j} = 0$)と掃き出していない制約式列($\lambda_i = 0$ かつ $a_{\ell i} = 1$)は除く
(10)

●列の選択 $i=1, \dots, r$
 $-g_i < 0$ の k 列を選ぶ
 ●行の選択 $j=1, \dots, n$
 $\nabla_s L_j / a_{jk} \geq 0, \lambda_{mj} / a_{jk} \geq 0$ について $\min$ の ℓ 行を選ぶ
(11)

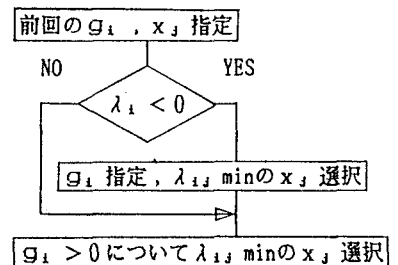


図-3 等式掃き出し