(Ⅰ−32)　多くの不等式制約条件を持つ極小値探索の一方法

東京都立大学　正会員　野上　邦栄

1．まえがき　非線形の最適設計問題で用いられる方法としては、逐次線形計画法，許容方向法およびＳＵＭＴ等多くのものが知られている[1) 2)]。Lagrangeの未定乗数法は、Kuhn-Tucker の最適性基準の関連においても理論的重要性を持つ方法であるが、そのままの形ではあまり利用されない[3)]。それは、Newton-Raphson法と組み合わせた場合など、関数系によっては初期値の取り方が悪いと解が発散し、収束が困難になることが主な要因である。その改善への効率的対策として、ここでは必要な修正ベクトルを過大にしない工夫さらに自動的に初期値を設定する取扱方および機械的に活性制約を選択する計算法を提案する。

2．基本的な考え方　Lagrangeの未定乗数法を用いた非線形最適設計問題は、目的関数Φおよびｓ個の制約条件g_k に対してm個の設計変数およびLagrange乗数を各々x_i, λ_i と置く時、次式により定式化できる。

$$\left.\begin{aligned}\Psi_j(x_i) &= \Phi_{,j}(x_i)+\lambda_k g_{k,j}(x_i)=0\\ \Psi_{m+K}(x_i) &= g_k(x_i) \qquad\qquad =0\end{aligned}\quad i,j=1,2,\cdot\cdot,m\quad k=1,2,\cdot\cdot,s\right\}\tag{1}$$

ここに、Ψ_j は探索点x_i, λ_k に対する誤差量である。したがって、満足する設計変数x_i の修正ベクトルdx_i はNewton-Raphson法を用いるものとする時、

$$\left.\begin{aligned}(\Phi_{,jr}+\lambda_k g_{k,jr})\,dx_r+g_{k,j}\,d\lambda_k &= -\Psi_j\\ g_{k,r}\,dx_r &= -\Psi_{m+K}\end{aligned}\quad r=1,2,\cdot\cdot,m\right\}\tag{2}$$

により決定すれば良いことになる。ここに、添え字（ ）$_{,j}$はx_j に関する微分を表す。

なお、上式の第２式において、スカラー量γ_k と単位ベクトル$y_{k,r}$ を導入し、

$$\gamma_k^2=\sum_{r=1}^{m} g_{k,r}^2\ ,\quad y_{k,r}=g_{k,r}/\gamma_k\ ,\quad \sum_{r=1}^{m} y_{k,r}^2=1\tag{3}$$

とすると、

$$y_{k,r}\,dx_r=-g_k/\gamma_k=-\mu_k\tag{4}$$

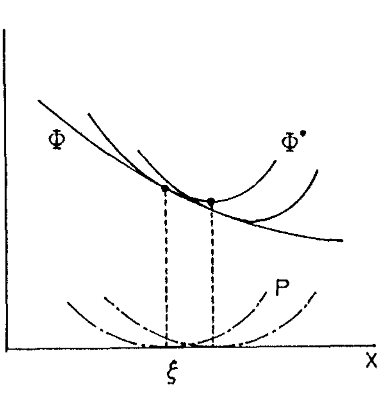
になる。ベクトル$y_{k,r}$ は単位ベクトルであるから、上式は制約面を表し、$g_k/\gamma_k=\mu_k$ が初期探索点の位置から制約面までの最短距離（抵触深さ）を表す。また、式(2) の第１式におけるλ_k はその符号だけが問題であるため、その初期値λ_k はいつでも零にしておいて良い。符号は$d\lambda_k$ のみによって確かめられるため、結局取り扱うべき式は$d\lambda_k$ を単にλ_k と書き、さらに、式(3) を考慮すると

$$\Phi_{,jr}\,dx_r+\nu_k y_{k,r}=-\Phi_{,j}\tag{5}$$

と書き換えられる。ただし、$\nu_k=\lambda_k\gamma_k$ と置いた。実際の計算においては、上式と式(4) の連立非線形式を式(2) に代わって用いることにすれば、直接抵触深さμ_k が与えられているので具合が良い。

3．疑似目的関数　この方法を適用する時、探索点における目的関数の曲率があまり小さいと式(5) の解として得られる修正ベクトルに極めて大きな成分を含むことになりしばしば不都合が生じる。その対策として、ここでは目的関数に別な仮想の関数P(x_i, ξ_i) を加えたものを疑似目的関数として使う。この仮想の関数Pは、一種の罰金項と見做されるが、座標に固定された関数ではなく、何時でも考えている探索点に原点と極小値を持つ放物曲面であることである。すなわち、Pを

$$P(x_i,\xi_i)=\sum_{i=1}^{m}(x_i-\xi_i)^2K_i/2\tag{6}$$



図−１　疑似目的関数

とした時、疑似目的関数Φ^*を

$$\Phi^*(x_i, \xi_i) = \Phi(x_i) + P(x_i, \xi_i) \qquad (7)$$

とし、これを目的関数のかわりに使用するのである。ここに、K_i は任意の正の実定数である。また、ξ_i は常に探索点における x_i と同じ値をもつものとする。これによりその点において本来の目的関数と同じ値と同じ勾配を持つので式(1) には全く影響しない。また、正の曲率が追加されている結果、式(5) の対角項 $\Phi,_{jj}$ は目的関数が線形であるような成分についても零でない正値をもつようになる。

4．初期値の設定および制約条件の選択　いま、任意に選んだ初期値がs本の互いに独立な制約条件に抵触している場合、問題の点をこれらの制約条件の交面上に移動させる必要があるが、$s<m$の時には一義的にその点を決定できない。ここでは、その場合の移動は、可能な限り現在の初期値から最短距離で行うことにする。つまり

$$\{dx_r\}^2 \longrightarrow \text{Minimum}$$

の条件により決定するのである。したがって、問題は考慮すべき制約条件式の基で、これをLagrangeの未定乗数法を用いて解くものとすれば、

$$\left.\begin{aligned} 2\mathbb{E}\ \{dx_r\} + Y\ \{\nu_k\} &= 0 \\ Y^T\ \{dx_r\} &= -\{\mu_K\} \end{aligned}\right\} \longrightarrow Y^TY\ \{\bar{\nu}_k\} = \{\mu_K\} \qquad (8)$$

により修正ベクトルdx_r を求める問題に帰着される。ここに、$\mathbb{E}$は単位行列、$Y=[y_{ij}]$ i=1,2 ・,s :j=1,2,・,m、$\bar{\nu}_k = \nu_k/2$を表す。具体的な計算手順は次のようになる。

①初期値x^o を設定する。

②総ての制約条件式g_k に初期値を代入し、その点における$y_{k,i}$ とμ_k を求める。

③μ_k が正で最大のものμ_u を見出す。もし正のものでなければ、x^o は可能領域に在るからそれ以上の計算は不要である。

④$Y^{(1)}_{ij}$とμ_k を作る。〔$Y^TY=[Y_{ij}]$〕

⑤第u行の対角項を軸として、消去を行う。

⑥第u行以外の行について、$Y^{(2)}_{ij}$と$\mu^{(2)}_k$を作り、$r^{(1)}_i$を記憶する。$r^{(1)}_i=0$となるような行が見出された場合は、その行と列を消去する。
〔$r_i^2=(Y_{ij}-Y_{iu}Y_{ju})$〕

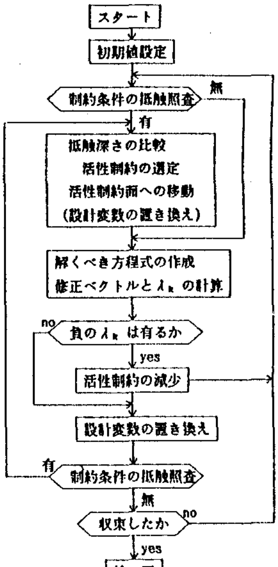
⑦$\mu^{(2)}_k$ の中の正で最大のものの$\mu^{(2)}_v$ を見出す。正のものが無ければ⑧に以降するが、もし有れば上記⑤以下と同様の方法を繰り返す。

⑧すべての消去が終了した時、解としての$\bar{\nu}^{(w)}_i$から、解$\bar{\nu}_i$ は、

$\bar{\nu}_i = \bar{\nu}^{(w)}_i / \prod_{j=1}^{w} r^{(j)}_i$

によって求められる。

⑨これを用い、修正ベクトルは　$dx_r = -Y\nu_i$ で計算できる。



図－2　極小値探索のフロー

したがって、任意の初期値から出発して上式(8) の方法により使用すべき制約条件を適当に選択される。その後は、式(7) によって最適値へ向けての修正ベクトル計算を行うことになる。以上の一般的な極小値探索の計算手順は、図－2のようになる。なお、具体的な数値計算結果は当日発表予定である。

参考文献 1) 土木学会編：構造システムの最適化～理論と応用～, 1988.9

2) 山田善一・大久保禎二：最適構造設計－概念・方法・応用－, 丸善, 1983.10

3) G.N.Vanderplaats : Numerical optimization techniques for engineering design with applications, McGraw-Hill, 1984