(I −28)　全ひずみ理論に基づく薄板の塑性化評価方法に関する一考察

早稲田大学理工学部　学生員○小粥　康弘
早稲田大学理工学部　正　員　平嶋　政治
早稲田大学理工学部　正　員　末武　義崇

1．はじめに

鋼構造物の耐荷力を解明する際に、各部材を薄板として解析することが多くなってきた。それに伴い、薄板の弾塑性有限変位解析の必要性も増大しているのが現状である。筆者らも Kármán-Marguerre の平板理論と Hencky の全ひずみ理論とに基づく薄板の弾塑性有限変位理論を定式化し、差分法を用いた簡易解析手法の考案を試みてきた[1),2)]。その際、面内の膜効果と面外の曲げ効果との連成を無視し、それぞれを独立に評価することによって塑性化影響係数の算定をはかった。

本報告では、筆者らが考案したこれまでの手法をさらに簡易化した解析を試みると共に、板厚方向の応力分布に仮定を設けることにより、膜効果と曲げ効果の連成を考慮した塑性化評価方法を考案する。

2．塑性化影響係数

本報告では、材料非線形性を考慮するにあたり、Hencky の全ひずみ理論を用いている。Hencky の全ひずみ理論においては、各塑性ひずみ成分と偏差応力成分との比例関係が仮定され、その比例係数χは、相当応力−相当塑性ひずみ（$\bar{\sigma}-\bar{\varepsilon}^{(p)}$）関係の割線係数として与えられる。平板問題におけるχは、実際にはz方向に変化するパラメータとなるが、ここでは膜効果に関するχ_mと、曲げ効果に関するχ_bとの２つの係数に分けて塑性化の影響を評価することにする。すなわち、次式で表される応力−ひずみ関係式をもちいる。

$$\begin{cases}\varepsilon_{0x}=(N_x-\nu N_y)+\chi_m(2N_x-N_y)/3t\\ \varepsilon_{0y}=(-\nu N_x+N_y)+\chi_m(-N_x+2N_y)/3t\\ \gamma_{0xy}=2\{(1+\nu)/Et+\chi_m/t\}N_{xy}\end{cases}\qquad\begin{cases}\kappa_x=12(M_x-\nu M_y)/Et^3+4\chi_b(2M_x-M_y)/t^3\\ \kappa_y=12(-\nu M_x+M_y)/Et^3+4\chi_b(-M_x+2M_y)/t^3\\ \kappa_{xy}=24M_{xy}(1+\nu)/Et^3+24\chi_b M_{xy}/t^3\end{cases}\qquad(1)$$

この結果、塑性化影響係数χ_m、χ_bを板厚方向zに依らないパラメータと見なすことができる。また、膜効果と曲げ効果との連成の有無に関しては、この２つの係数の算出過程において考慮するものとする。χ_m、χ_bの算定式の誘導に当たっては、応力およびひずみの相当量の間の関係式が必要である。式(1)を用いて各相当量の間の関係式を求めると、次式のようになる。

$$\bar{\varepsilon}_0=\frac{2}{3t}\left(\frac{1+\nu}{E}+\chi_m\right)\bar{N}\qquad\qquad\bar{\kappa}=\frac{8}{t^3}\left(\frac{1+\nu}{E}+\chi_b\right)\bar{M}\qquad(2)$$

さらに、板厚方向の応力分布に関し、特定な分布形状を仮定すれば、式(2)をもちいてχ_m、χ_bの算定式を誘導することができる。

3．膜効果と曲げ効果の連成を考慮しない場合

塑性化影響係数χ_m、χ_bの算定に際し、膜力のみの場合あるいは曲げのみの場合の応力分布にそれぞれ限定して算定式の誘導を行う。仮定した応力状態に対応する膜力−膜ひずみ関係式およびモーメント−曲率関係式を求め、式(2)と等置することによって、χ_mおよびχ_bの算定式として次式を導いた。

$$\chi_m=\frac{3}{2}\frac{E-H}{EH}\left(1-\frac{N_0}{\bar{N}}\right)+\frac{1-2\nu}{2E}\qquad\chi_b=\frac{t^3\bar{\kappa}}{4M_0\left[\frac{E-H}{E}\left\{3-4\left(\frac{6M_0}{Et^3\bar{\kappa}}\right)^2\right\}+\frac{Ht^3\bar{\kappa}}{6M_0}\right]}-\frac{1+\nu}{E}\qquad(3)$$

式(3)において、$\bar{N}$、$\bar{\kappa}$は薄板の基礎方程式[1),2)]を解いて得られる応力関数Fおよびたわみ W から直ちに計算することができる。ここでは、筆者らの簡易解析手法[1),2)]をさらに簡易化する目的から、Galerkin 法の一項近似を用いた。解析対象として、４辺単純支持された、一方向一様圧縮力を受ける正方形平板（図１）を選び、無次元化たわみωおよび応力関数 f を以下のように置いた。

$$\omega=\omega_c\sin(\pi x/a)\sin(\pi y/a)\ ,\quad f=-k\pi^2(y/a-1/2)^2/24/(1-\nu^2)+\theta\sin(\pi x/a)\sin(\pi y/a) \qquad (4)$$

式(4)を薄板の弾塑性有限変位理論に対する基礎方程式[1),2)]に代入し、板の領域内で積分する。その際、平板をいくつかの小領域に分け、その領域内ではχ_m、χ_bの値は一定として面積分を行った。以上の過程を経て、中央点の無次元化たわみ－無次元化荷重（ω_c －k）関係式として次式を得た。

$$\omega_c=\frac{\pi^2}{8}\sqrt{\frac{\{3+(2/\pi^2)F(N)\}\{1+G(N)/\pi^2\}}{2(1-\nu^2)\{4-H(N)\}}\left\{k-\frac{4}{1+G(N)/\pi^2}\right\}} \qquad (5)$$

ここに、F(N), G(N), H(N)は各小領域の塑性化に伴って生ずる、面積分に対する寄与を表しており、N は領域総数である。

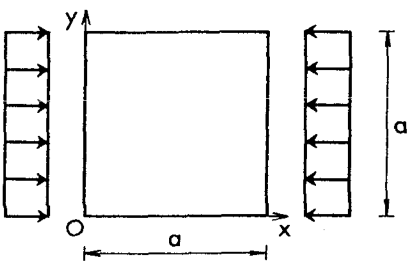

図1　解析モデル

表1　解析モデルの寸法、材料定数

幅厚比	１００
Young率	２．１×１０^6 (kg/cm^2)
降伏応力	３６００　(kg/cm^2)
分割総数	２５

実際の数値計算結果について述べる。解析モデルの寸法、材料定数等は表1に示す通りである。解析結果を図2に示す。図2は縦軸に座屈係数k、横軸にたわみを板厚で割った無次元化たわみω_cをそれぞれとって示した。図2より、極限値を有するような釣合経路を求めるまでには至らなかったものの、Galerkin 法の一項近似という極めて単純化された解析手法を用いても弾性解と異なる弾塑性有限変位挙動が得られていることがわかる。

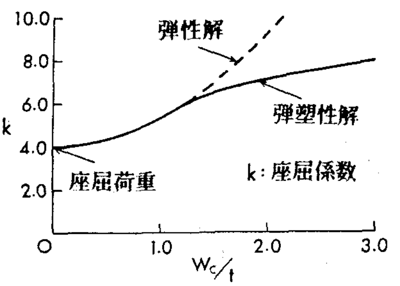

図2　中央点の変位挙動

4．連成を考慮した場合のχ_m、χ_b算定法

この節では膜効果と曲げ効果との連成を考慮した塑性化評価方法について考察する。図3に示すような理想化した板厚方向の応力分布を仮定すると、理想化された膜力$\tilde N$、モーメント$\tilde M$、膜ひずみ$\tilde\varepsilon_\theta$、曲率$\tilde\kappa$の間の関係式は次式のようになる。

$$\tilde N=\left\{\frac{(E-H)}{2}(Z^{(p)})^2-\frac{t(E+H)}{2}Z^{(p)}+\frac{N_y}{\tilde\kappa}+\frac{t^2(E-H)}{4}\right\}\tilde\kappa \qquad (6)$$

$$\tilde M=\left\{\frac{(E-H)}{6}(Z^{(p)})^3-\frac{t^2(E-H)}{8}Z^{(p)}+\frac{t^3(E-H)}{24}\right\}\tilde\kappa \qquad (7)$$

ただし、$z^{(p)}$は弾塑性境界を表す。$z=z^{(p)}$における応力分布の連続条件より、$z^{(p)}$の決定方程式を得るすなわち

$$(Z^{(p)})^2-\frac{E+H}{E-H}tZ^{(p)}+\frac{t^2}{2}+\frac{2}{(E-H)\tilde\kappa}(N_y-\tilde N)=0 \qquad (8)$$

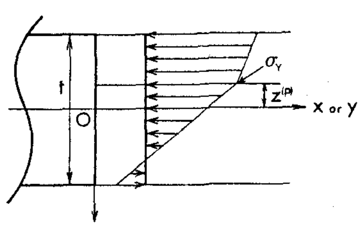

図3　板厚方向の応力分布

ここで$\tilde N, \tilde M, \tilde\varepsilon_\theta, \tilde\kappa$をそれぞれ$\bar N, \bar M, \bar\varepsilon_\theta, \bar\kappa$と等置し、$\chi_m$、$\chi_b$の算定式として次式を誘導した。

$$\chi_m=\frac{3t}{2\bar N}(\varepsilon_y-\bar\kappa Z^{(p)})-\frac{1+\nu}{E} \qquad (9) \qquad\qquad \chi_b=\frac{3t^3}{2(E-H)Z^{(p)}\{4(Z^{(p)})^2-3t^2\}+(E+H)t^3}-\frac{1+\nu}{E} \qquad (10)$$

5．まとめ

筆者らはこれまで薄板の弾塑性有限変位解析に対する簡易解析手法を模索してきた。その際、塑性化の影響を評価するパラメータχ_m、χ_bをどの様な過程の基に算定するかが重要な問題である。本報では、筆者らがこれまで用いてきた膜効果と曲げ効果との連成を無視した算定法による簡易解析を実施すると共に、両者の連成を考慮した算定式として、式(9)、(10)を導いた。今後は数値計算の実施によって、式(9)、(10)の妥当性について検討し併せて他の評価方法についての研究も進めてゆきたい。

参考文献

1)対馬・平嶋・依田・末武：土木学会第１４回関東支部技術研究発表会講演概要集、ｐｐ．４～５．
2)守田・平嶋・依田・末武：土木学会第４４回年次学術講演会講演概要集、第１部、ｐｐ．８２～８３．