

新潟大学工学部 正員 阿部 和久

新潟大学工学部 学生 原田 亮

1. はじめに 以前、著者らは半無限弾性体上におかれた極異方性円盤を対象に、円盤自由端の浮き上がりの解析を目的とした手法を示し、異方性の度合いが浮き上がりに対して及ぼす影響について検討した¹⁾。その際の接触条件としては摩擦のない滑らかな接触面を仮定した。一方、本報告においては浮き上がりに加え更に摩擦による接触面の滑りを考慮した場合の解析手法について述べ、摩擦が円盤の挙動に与える影響等に関する若干の解析結果を示した。なお、以下においては等方性円盤を対象として議論を進めるものとする。

2. 解析対象 半無限領域は等方均質弾性体であり、せん断弾性係数およびポアソン比をそれぞれ G 、 ν_E とする。一方、円盤の半径を R 、接触域の半径を a 、摩擦の下で半無限体と完全に付着している範囲を ζ とし、曲げ剛性を D 、ポアソン比を ν とする。また、接触面における摩擦はクーロン摩擦を仮定し、その摩擦係数を μ とする。荷重は集中荷重 P とし円盤の中心に作用するものとする。なお、概略は図-1に示すようであり軸対称問題となる。

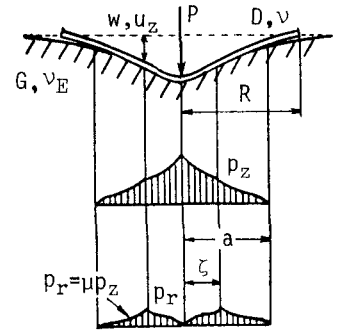


図-1 解析対象の諸条件

3. 積分方程式による定式化 前報と同様にGreen関数を用いた積分方程式による定式化を採用する。図-1に示すように、円盤のたわみを w 、接触応力のうち鉛直方向成分を p_z 、半径方向成分を p_r とすれば、接触域内における円盤のたわみは次式で与えられる。

$$w(r) = w(R) + \frac{P}{2\pi} w^*(r, 0) - \int_0^a p_z(\rho) w^*(r, \rho) \rho d\rho \quad (1)$$

ここに、 $w^*(r, \rho)$ は次式で与えられるGreen関数である。

$$w^*(r, \rho) = \frac{(\rho^2 + r^2)}{4D} \log\left(\frac{r}{R}\right) - \frac{1}{8D(1+\nu)} \left\{ (1-\nu)\rho^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + (3+\nu)r^2 \right\} \quad (\rho < r \leq R) \quad (2)$$

$r < \rho$ に対しては式(2)において ρ と r とを入れ換えればよい。

一方、半無限体の円盤との接触域における鉛直および半径方向変位 u_z 、 u_r は次式で与えられる。

$$u_z(r) = \int_0^a [U_{zz}^*(r, \rho) p_z(\rho) + U_{zr}^*(r, \rho) p_r(\rho)] d\rho \quad (3 \cdot a)$$

$$u_r(r) = \int_0^a [U_{rz}^*(r, \rho) p_z(\rho) + U_{rr}^*(r, \rho) p_r(\rho)] d\rho \quad (3 \cdot b)$$

ここに、 U_{zz}^* 等はBoussinesq解およびCerruti解より得られるGreen関数であり、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} U_{zz}^*(r, \rho) &= \frac{2(1-\nu_E)\rho}{\pi G(\rho+r)} \cdot K(k), & U_{zr}^*(r, \rho) &= -\frac{1-2\nu_E}{2G} H(\rho-r), & k^2 &= \frac{4\rho r}{(\rho+r)^2} \\ U_{rz}^*(r, \rho) &= -\frac{(1-2\nu_E)\rho}{2Gr} \cdot H(r-\rho), & U_{rr}^*(r, \rho) &= \frac{1-\nu_E}{\pi Gr} \left[\frac{\rho^2 + r^2}{\rho+r} \cdot K(k) - (\rho+r)E(k) \right] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで、 $K(k)$ 、 $E(k)$ はそれぞれ第1種および第2種完全楕円積分であり、 $H()$ はHeaviside関数である。

円盤は半径方向に伸縮しないものとする、接触域における変位の連続条件は次式のような。

$$\text{鉛直方向変位: } w(r) = u_z(r) \quad (r \leq a) \quad \text{水平方向変位: } u_r(r) = 0 \quad (r \leq \zeta) \quad (5 \cdot a, b)$$

さらに接触力 p_z と p_r との関係は次のようになる。

$$p_r(r) \leq \mu p_z(r) \quad (r \leq \zeta), \quad p_r(r) = \mu p_z(r) \quad (\zeta < r \leq a) \quad (6)$$

式(5)に式(1)、(3)を用い、更に式(6)の関係を考慮すると無次元化の後、鉛直方向力のつり合い条件と併

せ、次の積分方程式を得ることとなる。

$$\frac{\omega}{2\pi} \bar{w}^*(0, \bar{r}) = -\bar{w}(\bar{R}) + \int_0^1 \bar{K}_{zz}^* \bar{p}_z d\bar{\rho} + \int_0^{\bar{\zeta}} \bar{K}_{zr}^* \bar{p}_r d\bar{\rho} + \mu \int_{\bar{\zeta}}^1 \bar{K}_{zr}^* \bar{p}_z d\bar{\rho} \quad (7 \cdot a)$$

$$\bar{K}_{z\beta}^* = \bar{U}_{z\beta}^* + \omega \bar{\rho} \bar{w}^* \cdot \delta_{z\beta}$$

$$0 = \int_0^1 \bar{U}_{rz}^* \bar{p}_z d\bar{\rho} + \int_0^{\bar{\zeta}} \bar{U}_{rr}^* \bar{p}_r d\bar{\rho} + \mu \int_{\bar{\zeta}}^1 \bar{U}_{rr}^* \bar{p}_z d\bar{\rho} \quad (7 \cdot b)$$

$$\frac{1}{2\pi} = \int_0^1 \bar{\rho} \bar{p}_z(\bar{\rho}) d\bar{\rho} \quad (8)$$

なお、式(7), (8)で用いた無次元量は以下に定義されたものである。

$$\left. \begin{aligned} \bar{r} &= \frac{r}{a}, \quad \bar{R} = \frac{R}{a}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{a}, \quad \bar{\zeta} = \frac{\zeta}{a}, \quad \bar{w} = \frac{aG}{P(1-\nu_E)} \cdot w, \quad \bar{w}^* = -\frac{D}{a^2} \cdot w^*, \quad \omega = \frac{a^3 G}{D(1-\nu_E)} \\ \bar{p}_\alpha &= -\frac{a^2}{P} \cdot p_\alpha, \quad \bar{U}_{\alpha\beta}^* = \frac{G}{1-\nu_E} \cdot U_{\alpha\beta}^* \quad (\alpha, \beta = z, r) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式(7), (8)により必要な方程式が得られることとなる。

4. 積分方程式の離散化解法 式(7), (8)において基本的な未知量は接触力 $\bar{p}_z, \bar{p}_r$ および $\bar{w}(\bar{R})$ である。 $\bar{p}_z, \bar{p}_r$ の分布は一次要素で離散化近似し、ただし浮き上がりの生じない場合 ($\bar{R}=1$) の接触端における接触力は無限大となるので、このときは特異要素を用いることとした。なお、方程式の離散化には選点法を用いた。また、浮き上がりが生ずる場合に接触端において $\bar{p}_z$ はゼロとなり、付着域と滑り域との境界 $\bar{\zeta}$ においては $\bar{p}_r(\bar{\zeta}) = \mu \bar{p}_z(\bar{\zeta})$ となる。これらの条件をみたす解を効率良く求めるために、本研究においては接触のモード $\bar{R}$, $\bar{\zeta}$ を固定し、その下で $\bar{p}_z, \bar{p}_r$ が上述の条件をみたすように、パラメーター ω および摩擦係数 μ を調節する手法をとった。

5. 解析結果 式(7)は $\mu, \omega, \nu_E, \nu, \bar{R}, \bar{\zeta}$ の6つのパラメーターに依存する。そこで、解析にあたっては円盤のポアソン比 ν を0.25で一定とし、他の5つのパラメーターの関係について調べることにした。半無限体のポアソン比 ν_E が0.1と0.4の場合の $\omega, \mu, \bar{R}$ および $\bar{\zeta}$ の関係は図-2(a), (b)のようになる。なお、図において横軸には $\omega \bar{R}^3 = GR^3/D(1-\nu_E)$ をとってある。

これらの図より、浮き上がりの生ずる $\bar{R} > 1$ においては浮き上がりと滑りとは互いにほぼ独立しており、摩擦係数 μ は $\bar{R}$ に、また ω は $\bar{\zeta}$ にはほとんど影響を与えていないことがわかる。一方、完全に接触の生ずる $\bar{R} = 1$ の場合に $\bar{\zeta}$ は μ のみでなく ω にも大きく依存しており、その様子は半無限体のポアソン比によっても顕著に異なることがわかる。

6. おわりに 浮き上がりと滑りを考慮した円盤と半無限弾性体との接触問題を積分方程式により定式化する手法について述べた。また、浮き上がりの生ずる場合と生じない場合とで各パラメーターが円盤の挙動に及ぼす影響が大きく異なる結果が得られた。

〈参考文献〉阿部・服部：半無限弾性体上におかれた極異方性板の挙動について、第15回関東支部技術研究発表会講演概要集

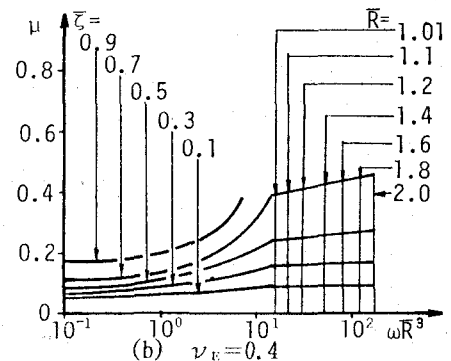
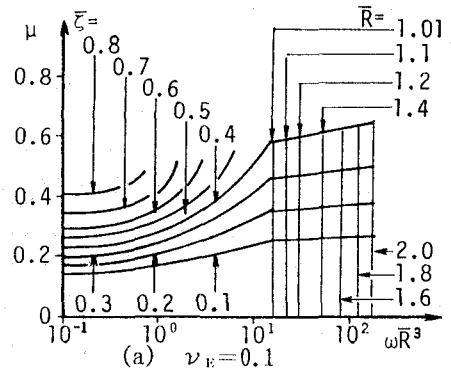


図-2 各パラメーターが浮き上がり
と滑りに及ぼす影響