

(Ⅲ-19) パソコンによる流線網の図解法

東洋大学 正会員 石田 哲朗

1. まえがき 土質工学における図解法の中に流線網がある。流線網はモールの応力円などの幾何学的な作図と違いフリーハンドで描いていくことが多く作図上の誤差や精度の高い数値解析結果を図化するときなどには問題が残る。等ポテンシャル分布は、理論的な数学解や数値解析によって求めることができるが、その結果を基に通常のトライアルアンドエラー法で流線網の図式解を得ても、その幾何学形状から求める定数(N_F/N_D)の客観的な比較がしにくい。ここに、 N_F は流線で挟まれた部分の数、 N_D は等ポテンシャル線で挟まれた部分の数である。そこで以下には、パーソナルコンピュータによって計算ならびに作図させて流線網を描き、そこから得られる数値解をより定量的に把握する方法を示す。

2. 等ポテンシャル分布の求め方と図形処理 与えられた境界条件のもとでラプラスの方程式を解き、等ポテンシャルの分布を求める。従来解析手法としては、差分法や有限要素法で代表される領域法が多く用いられていたが、最近ではパーソナルコンピュータの発達に伴い境界要素法が活用されてきた。この解析法は境界だけを分割すればよいので入力データ数がかなり削減できる。一度解析を行えば領域内で所望のポテンシャル値が得られるまで追加計算を行うことが可能であるので、流線網のように等ポテンシャルの分割数で知りたい点が最初から設定できないものには最適である。

等ポテンシャル線にせよ、流線にせよ、与えられた点の間を滑らかに変化する値で結ぶ必要がある。コンピュータ・グラフィックスでは、 n 次式スプライン曲線、ベジェ曲線が一般に多く用いられている。ここではベジェ曲線を採用した。この曲線は曲線形状を一意に定義するポリゴンの頂点が関連する。図-1に示したようにA~Cの3点間では、ABの中点とBCの中点を滑らかな曲線でつなぎ、次いでB~D間というように各区間の中点で分割しながら、逐次それぞれのセグメントを結び一本の曲線を描く。あるセグメントの頂点を変化させてもその影響はそのセグメント内に限られ、与えられた点間に解析的な数式表現(ここでは放物線)が入るのでユーザーは出力結果を予測しやすい。したがって描かれた流線網を望ましい形状へ修正することも容易である。

3. 流線網の作成方法 まず、解析領域の縦横の縮尺を等しく取った図を方眼紙に書く。用いる境界要素に合せて境界領域を分割し解析する。境界値を求めた後、領域内のポテンシャル値を出力させる。そして、任意に等ポテンシャルの分割数 N_D を決めその点をプロットして曲線群を描く。次に、各々の曲線を媒介変数表示ができるような2次曲線に置き換える。等角写像理論による地下水流の解析には円錐曲線である楕円・双曲線が現われる。しかし、離心率の高い楕円などは表示点を等角度間隔で変化させて計算すると満足すべき結果が得られないこともあるから、パラメータとして角度をとり一定角度の変化に対しても良好な結果が得られる円の方程式によって平面曲線を置き換えた。

具体的な説明例として図-2に「様な厚さの浸透層の上に置かれたダム」の流線網を示した。それぞれの等ポテンシャル線の軌跡は円の方程式で表されている。この図で隣り合う二曲線間を円が四角形に内接する必要十分条件、つまり対辺の和が等しくなるように計算し流路数 N_F を定める。各区間ごとにこの必要十分条件を満足するような流線との交点を決める計算を行ってもよいが、隣り合う円の方程式の半径があまりにも差が大きいと計算機結果が収束しにくいこともある。円の方程式でポテンシャルの軌跡を表し易く、あまりかけ離れた媒介変数を示さない隣り合う二曲線を探す。この流線網ではスクリーン上で塗った等ポテンシャル区間 $-4\Delta h \sim -5\Delta h$ を計算領域とする。それぞれのポテンシャル線は円の方程式に置き換えられプロットした点上に描かれている。 $-4\Delta h$ の等ポテンシャル線を基準とすると、図中の a は円の軌跡上にあり、この点の存在する象限によって弧度を徐々に減らすか増やしながらそれぞれの点において、 $-5\Delta h$ の円に向かって法線を引き、法線と円との交点の座標を計算させる。 $\psi_0 \sim \psi_1$ の区間なら a, b, f, g との和が a, f, b, g の和と等しくなるまで計算を繰り返させる。同様に $\psi_1 \sim \psi_2, \psi_2 \sim \psi_3$ と単位流線網を定める。不透水層までで計算は終了し、 $(e, j + d, i) / (d, e + i, j)$ の比から N_F の値が整数

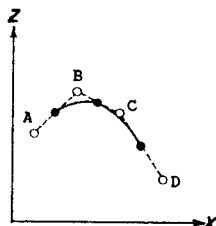


図-1 放物線による曲線定義

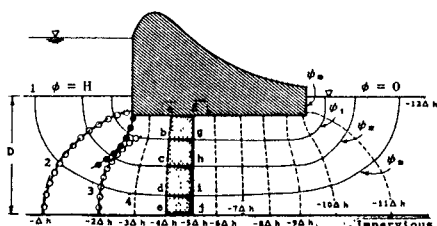


図-2 流線網の作図例

なり、小数を含んだ形で求まる。この段階で流線網の形状係数 (N_f/N_d) は定まる。他の区間でも同様な計算を行って検討を加えることが望ましい。必ずしも値は一致しないが大差ないことが分かる。それらの平均値を形状係数としてもよい。その後、流線網を作成するために $-4\Delta h$ の等ポテンシャル線上の各交点から $-3\Delta h$ へ法線が引き、その交点から逐次 $-2\Delta h$ 、さらに $-\Delta h$ と進む。また、 $5\Delta h$ から同様に $11\Delta h$ までの交点を求めていく。

ところで、堤体の上下端には $-2\Delta h$ 、 $-3\Delta h$ の等ポテンシャル線に示されているように円方程式には重ねにくいポテンシャル線が表れる。このようなときには、 $-2\Delta h$ のポテンシャル線に示したように ϕ_1 の流線との交点を定めるときには黒丸で表した円方程式で、それ以外は白ぬきの丸を連ねたそれで計算するとよい。また、 $\phi = H$ との交点は図中の 2, 3, 4 を通る円との交点とするか、方眼紙に書いた縮尺図の $\phi = H$ と $-\Delta h$ の区間に円を描き、それが内接し、かつ交点が直交するような点を $\phi = H$ 上に定める方法を選ぶ。このようにして求めた点を前述したベジエ曲線で結ぶと一つの流線網が出来上がる。

4. 解析例での検証 流線網は全ての土質力学の成書で取り上げられている。なかでも Lambe¹⁾ によるものは、かなりの精度で描かれた流線網が記載されていると思われる。その中からいくつか拾って、ここでの手法で流線網を作成し比較する。まず、文献1)の p.272 に描かれている不透水性構造物(コンクリートダム)の下を回る浸透流を考える。ここには、矢板の有無やその位置の異なる3ケースの流線網が描かれている。表-1には文献1)での解析結果を示す。地盤の透水係数は $5.145 \times 10^{-6} \text{ m/sec}$ である。図-3には、ここで提案する方法を用いて N_d の分割数を10, 12, 16と変えて流線網を描いた結果を示す。 $N_d=12$ のケースの計算機結果は $N_f=4.03$ であった。 $N_f=4$ としてもよいと思われるが表-2には得られた結果をそのまま掲げて、表-1の値と比較している。誤差は、表-1の Dam I における単位幅当たりの浸透水量との違いを示す。 $N_d=10$ と等ポテンシャル線の間隔がひろがったケースでも4%である。図-4には、Dam II の図解結果を示してある。文献1)に与えられているケースと等ポテンシャル線の分割数を等しくとったが、出力されたポテンシャル位置は多少異なっている。矢板の幅の設定によって幾分ポテンシャルの位置が変わることが考えられる。しかし、結果的には形状係数が等しくなり、かなりの精度の図式解が得られることが確認できる。また、均一異方性地盤のようにある座標で解析した結果を定数倍してCRTディスプレイ上に描き直すことは、コンピュータ・グラフィックスでは簡単なことである。

5. おわりに 紙面の都合上、詳細な説明や他の解析例を示すことができなかったがそれらについては別の機会に発表したい。末筆ながら本報をまとめるにあたり、ご教示いただいた東洋大学工学部 赤木俊允教授に、記して深謝の意を表する。

参考文献 1) T.W. Lambe and R.V. Whitman: Soil Mechanics SI Version, John Wiley & Sons, 1979.

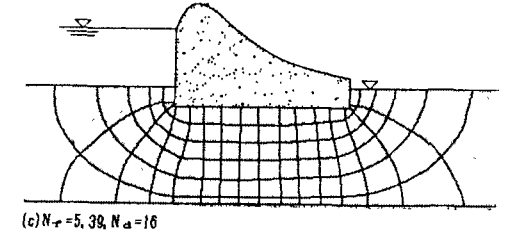
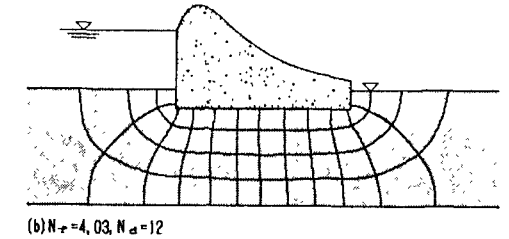
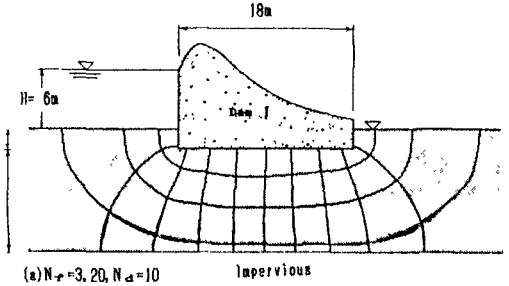


図-3 Dam I の図解結果

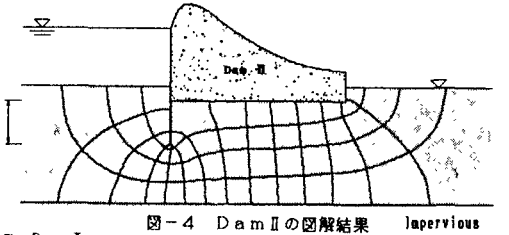


図-4 Dam II の図解結果

表-1 文献1)での解析結果

Dam	N_f	N_d	形状係数 N_f/N_d	単位幅当たりの 浸透水量 m^3/s
I	4	12	0.333	10.29×10^{-6}
II	4	14	0.286	8.82×10^{-6}
III	4	14	0.286	8.82×10^{-6}

表-2 本報での解析結果

Dam I				
N_f	N_d	形状係数 N_f/N_d	単位幅当たりの 浸透水量 m^3/s	誤差 (%)
3.20	10	0.320	9.88×10^{-6}	4
4.03	12	0.336	10.37×10^{-6}	0.8
5.39	16	0.337	10.40×10^{-6}	1