(Ⅰ−34)　境界要素法における境界値近似値の誤差推定に関する一考察

新潟大学大学院　学生員　中川　渉
新潟大学工学部　正　員　阿部　和久

1．はじめに　境界要素解の精度を評価する場合、要素の細分割化の過程における誤差ノルムの漸近収束性に基づいた評価が主に行われてきた。しかし、近似解の局所的精度を境界値自体の誤差に関して評価することも必要である。そこで、本研究では「方程式の離散化による残差」を用いて、境界値近似値の誤差推定を行い、具体的な問題に適用することにより本手法の妥当性を検討した。

2．誤差の推定方法　ここでは、次に示す二次元ポテンシャル問題を対象に一定要素境界要素法を用いた場合の、節点近似値の誤差を推定する手法について述べる。

$$\Delta u=0 \quad \text{in } \Omega$$

$$u=\bar{u} \quad \text{on } \Gamma_1 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial n}=\bar{q} \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2) \qquad \cdots\cdots(1)$$

ここで、Δはラプラシアン、nは外向き法線ベクトルである。

式(1)の境界値問題を直接法に基づく境界積分方程式に変換すると次式を得る。

$$c(x)u(x)+\int_\Gamma q^*(x,y)u(y)d\Gamma_y-\int_\Gamma u^*(x,y)q(y)d\Gamma_y=0 \quad (x\in\Gamma) \qquad \cdots\cdots(2)$$

ただし、q^*,u^* はラプラス方程式に対する基本解とし、$u=\bar{u}$ on Γ_1, $q=\bar{q}$ on Γ_2とする。

式(2)の境界値u,q に対する近似解$\tilde{u},\tilde{q}$ を次式のように定義する。

$$\tilde{u}(x)=\sum^N\phi_i(x)\tilde{u}_i \quad , \quad \tilde{q}(x)=\sum^N\phi_i(x)\tilde{q}_i \qquad \cdots\cdots(3)$$

ここで、ϕ_i は補間関数、Nは総節点数である。又、$\tilde{u}_i=\tilde{u}(x_i)$、$\tilde{q}_i=\tilde{q}(x_i)$としx$_i\in\Gamma_1$においては$\tilde{u}_i=\bar{u}(x_i)$、$x_i\in\Gamma_2$においては$\tilde{q}_i=\bar{q}(x_i)$と定める。以上の定義の下、式(3)を式(2)へ代入し選点法を適用すると次式を得る。

$$c_i\tilde{u}_i+\int_\Gamma q^*(x_i,y)\tilde{u}(y)d\Gamma_y-\int_\Gamma u^*(x_i,y)\tilde{q}(y)d\Gamma_y=0 \quad (i=1,2,\cdots N) \qquad \cdots\cdots(4)$$

一方、式(2)より真の解に対しては次式が成り立つ。

$$c_iu_i+\int_\Gamma q^*(x_i,y)u(y)d\Gamma_y-\int_\Gamma u^*(x_i,y)q(y)d\Gamma_y=0 \quad (i=1,2,\cdots N) \qquad \cdots\cdots(5)$$

式(5)と式(4)との差をとると次のようになる。

$$c_i(u_i-\tilde{u}_i)+\int_\Gamma q^*(x_i,y)(u-\tilde{u})d\Gamma_y-\int_\Gamma u^*(x_i,y)(q-\tilde{q})d\Gamma_y=0 \qquad \cdots\cdots(6)$$

真の解 u,qを式(3)と同一の方法で補間して得られる関数 $\hat{u},\hat{q}$を用いて、式(6)を次のように書き直す[1]。

$$c_iE_{ui}+\int_\Gamma q^*(x_i,y)\hat{E}_u\,d\Gamma_y-\int_\Gamma u^*(x_i,y)\hat{E}_q\,d\Gamma_y=R(x_i) \qquad \cdots\cdots(7)$$

$$R(x_i):=-\int_\Gamma q^*(x_i,y)(u-\hat{u})d\Gamma_y+\int_\Gamma u^*(x_i,y)(q-\hat{q})d\Gamma_y$$

ここで、$\hat{E}_u=\hat{u}-\tilde{u}$, $\hat{E}_q=\hat{q}-\tilde{q}$ であり、それぞれ誤差 $u-\tilde{u}$, $q-\tilde{q}$ を補間して得られるものである。又、$R(x_i)$は積分方程式(2)の離散化による残差である。式(7)を、式(4)より得られる連立方程式と同一の係数行列［k］を用いて表現すれば次のようになる。

$$[k]\,[E_q,E_u]^T=[R_1,R_2,\cdots R_N]^T \qquad \cdots\cdots(8)$$

式(7)の $R(x_i)$の値を求めるために次のような近似により$u-\hat{u}$, $q-\hat{q}$を評価した。

u,q の変化は各要素上で十分滑らかなものとし、要素Γ_i上で定義された局所座標sにより次のように展開できるものとする。

$$u(s)=u_i+\frac{du}{ds}\Big|_i s+\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2u}{ds^2}\Big|_i s^2+\cdots\cdots, \quad q(s)=q_i+\frac{dq}{ds}\Big|_i s+\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2q}{ds^2}\Big|_i s^2+\cdots\cdots, \qquad \cdots(9)$$

すると、要素Γ_i上では$u=u_i$, $q=q_i$であるから次式のように近似できる。

$$u-\hat{u}\sim\frac{du}{ds}\Big|_i\cdot s \quad , \quad q-\hat{q}\sim\frac{dq}{ds}\Big|_i\cdot s \qquad \cdots\cdots(10)$$

式(10)を式(7)の $R(x_i)$へ代入すると次式を得る。

$$R(x_i)=-\sum_j^N\int_{\Gamma_j}q^*(x_i,y)\cdot s\,d\Gamma_y\cdot\frac{du}{ds}\Big|_j+\sum_j^N\int_{\Gamma_j}u^*(x_i,y)\cdot s\,d\Gamma_y\cdot\frac{dq}{ds}\Big|_j \qquad \cdots\cdots(11)$$

したがって残差Rは、各境界値u,qの節点における接線方向勾配値が求まれば近似的に求められる[2]。

本研究では、誤差を求めようとしている境界値近似値$\tilde{u}$,$\tilde{q}$より得られる領域Ω内のポテンシャル v の境界極限値$\gamma\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)\Big|_j$，$\gamma\left(\frac{\partial^2 v}{\partial s\,\partial n}\right)\Big|_j$を利用して近似的に$\frac{du}{ds}\Big|_j$，$\frac{dq}{ds}\Big|_j$を求めることにした。一定要素を用いた場合、境界値近似値が各要素上で一定となるので、領域Ω内のポテンシャル v の導関数の境界極限値に関して次の関係が近似的に成り立つ。

$$\gamma\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)\Big|_j - \gamma\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)\Big|_j = \frac{1}{2}\cdot\frac{du}{ds}\Big|_j + \frac{\ell}{2\pi}\cdot\frac{dq}{ds}\Big|_j \qquad \cdots\cdots(12)$$

$$\gamma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial n}\right)\Big|_j - \gamma\left(\frac{\partial^2 v}{\partial s\,\partial n}\right)\Big|_j = \frac{4}{\pi\ell}\cdot\frac{du}{ds}\Big|_j + \frac{1}{2}\cdot\frac{dq}{ds}\Big|_j \qquad \cdots\cdots(13)$$

ここで、ℓとはΓ_jの要素長である。

すると、$\gamma\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)\Big|_j = \frac{du}{ds}\Big|_j$,$\gamma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial n}\right)\Big|_j = \frac{dq}{ds}\Big|_j$ であるから次式を得る。

$$\frac{du}{ds}\Big|_j = 2\cdot\gamma\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)\Big|_j + \frac{\ell}{\pi}\cdot\frac{dq}{ds}\Big|_j \qquad \cdots\cdots(14)$$

$$\frac{dq}{ds}\Big|_j = 2\cdot\gamma\left(\frac{\partial^2 v}{\partial s\,\partial n}\right)\Big|_j + \frac{8}{\pi\ell}\cdot\frac{dq}{ds}\Big|_j \qquad \cdots\cdots(15)$$

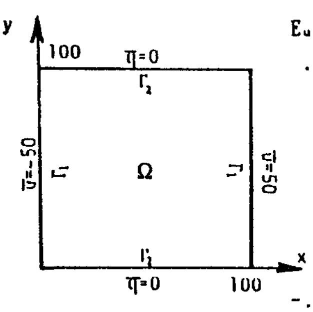
本手法ではΓ_2上の$\frac{du}{ds}\Big|_j$は式(14)より求め、一方Γ_1上の$\frac{dq}{ds}\Big|_j$に関しては、式(16)をみたす場合は式(15)より、それ以外は式(14)より求めることとした。

$$0.1\times\left|\ \gamma\left(\frac{\partial^2 v}{\partial s\,\partial n}\right)\Big|_j\ \right| \geqq \left|\ \frac{4}{\pi\ell}\cdot\frac{dq}{ds}\Big|_j\ \right| \qquad \cdots\cdots(16)$$

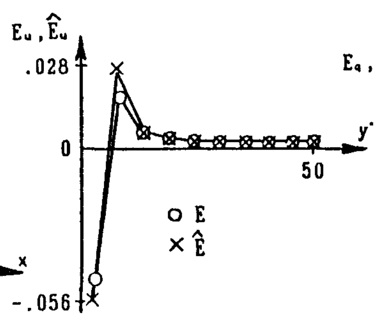
このようにして$\frac{du}{ds}\Big|_j$ ，$\frac{dq}{ds}\Big|_j$ が求まれば式(11)より$R(x_i)$の近似値が求まり、式(8)から各節点における誤差を推定することができる。

3．解析例

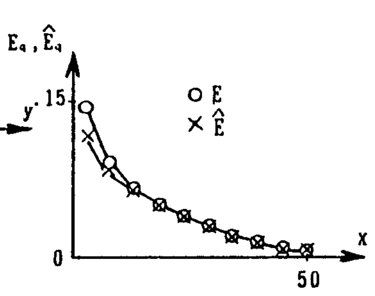
ここでは図－１に示した問題に対し、本手法を適用した結果について述べる。各辺共20等分割した場合に対する結果を示すと図－２，３のようである。図－２，３において縦軸は推定誤差$\hat{E}$および真の誤差E、横軸は境界辺である。これらの図より、この問題に対しては各節点において十分な誤差推定が行われていることがわかる。また、分割数が増すに従って推定誤差は真の誤差に近づくようである。



図－１　解析例



図－２　Γ_1上での誤差



図－３　Γ_2上での誤差

4．おわりに

「積分方程式の離散化による残差」に基づいた境界値近似値の誤差推定について検討を行った。ここに示した解析結果および他の例から、本手法による誤差推定が可能であることが判った。しかし問題によっては誤差推定が不十分な場合もあり、今後の検討を要するところである。

〈参考文献〉 1)Iso,Y.,Takahashi,S.and Onishi,K.,Numerical Convergence of Boundary Solutions in Transient Heat Conduction Problems. In Topics in Boundary Element Research.Vol 3,Springer-Verlag 1987

2)阿部・中川：境界要素法の自動要素分割と誤差予測に関する一考察．，土木学会第43回年次学術講演会 1988年