

(I - 28) 非線形応力-ひずみ特性を有する梁のフレーム構造

日本大学 正員 能町純雄

日本大学 正員 木田哲量

日本大学 正員○阿部 忠

日本大学 正員 澤野利章

1. 概 説

外力の作用によって生ずるひずみ ϵ とこれに対応する応力 σ の関係が線形関係である材料の場合の関係は式 (1) で表され、非線形関係にある場合には式 (2) で表される。

$$\sigma = K \epsilon \quad (1) \qquad \sigma = K \epsilon - B \epsilon^3 \quad (2)$$

ここで、式 (1), (2) における定数 K, B を以下のように定める。まず、材料が初期に示す応力は弾性力であることから、定数 K は材料の弾性係数 E とする。つぎに、復元作用が存在するひずみの範囲における応力が最大値となる時のひずみ値を ϵ_0 とすれば、 $\partial \sigma / \partial \epsilon = 0$ より、 $B = E / 3 \epsilon_0$ となる。よって、式 (1), (2) は次式で示される。

$$\sigma = E \epsilon \quad (3) \qquad \sigma = E \left(\epsilon - \frac{\epsilon^3}{3 \epsilon_0^2} \right) \quad (4)$$

2. 解析方法

本論文においては、モデルを構成する材料の力学特性が線形な場合と非線形な場合について、その柱部材に生じる曲げモーメントをそれぞれ $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ とした場合について解析し、比較検討するものである。まず、柱部材の断面においては平面保持の法則が成り立つものと仮定し、中立軸から距離 ζ における曲率半径を ρ とするならば、距離 ζ におけるひずみ ϵ は、 $\epsilon = \zeta / \rho$ で与えられる。したがって、この断面の中立軸に関する曲げモーメント $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ は式 (3), (4) の関係より、それぞれ次のように表すことができる。

$$M^{(1)} = \int_A \zeta \sigma dA = \int_A \zeta E \frac{\zeta}{\rho} dA \quad (5)$$

$$M^{(2)} = \int_A \zeta \sigma dA = \int_A \zeta E \left(\frac{\zeta}{\rho} - \frac{\zeta^3}{3 \rho^3 \epsilon_0^2} \right) dA \quad (6)$$

ここで、 $I = \int_A \zeta^2 dA$, $I' = \int_A \zeta^4 dA$ とすれば式 (5), (6) はそれぞれ次のようになる。

$$M^{(1)} = E I \kappa \quad (7) \qquad M^{(2)} = E I \kappa \left(1 - \frac{\kappa^2}{3 \kappa_0^2} \right) \quad (8)$$

よって、柱部材断面の最大曲げモーメントは式 (9) となる。

$$M_{MAX}^{(2)} = \frac{2}{3} E I \kappa_0 \quad (9)$$

ここで、 κ ; 曲率, $E I$; 柱部材断面の曲げ剛性

すなわち最大曲げ応力は、はりの表面よりその高さの約11%内部に生ずることとなるので、断面の曲げモーメントは、はりの縁応力が最大になる場合を限界とする。

3. 非線形たわみ角式

非線形な応力-ひずみ関係を示す部材と考えた場合の曲率を式(8)から導くこととする。なお、以降においては非線形部材を論ずることから部材に生ずるモーメント $M^{(2)}$ は M として表すこととする。まず、式(8)より曲率 κ は式(10)として表すことができる。

$$\kappa = \frac{M^{(2)}}{E l} + \frac{\kappa^3}{3 \kappa_0^2} = \frac{M}{E l} + \frac{\kappa^3}{3 \kappa_0^2} \quad (10)$$

いま、部材 AB の両端に M_{AB} 、 M_{BA} が図-2 のように作用するとき、 M_{AB} 、 M_{BA} によって分割された点②に曲げモーメントが 0 となる点があり、式 (10) の右辺第 2 項が②③区間では弾性荷重②③⑤、①②区間では①②④が増加することとなる。そこで、 M_{AB} 、 M_{BA} に対する曲率をそれぞれ κ_{AB} 、 κ_{BA} とすれば、

②③区間では,

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^3}{3 \kappa_0^2} &= \frac{\kappa_{BA}^3}{3 \kappa_0^2} \left(\frac{x}{b} \right)^3 \\ &= \frac{1}{3} \mu_{BA} \left(\frac{x}{b} \right)^3 \end{aligned} \quad (11)$$

①②区間では,

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^3}{3 \kappa_0^2} &= \frac{\kappa_{AB}^3}{3 \kappa_0^2} \left(\frac{x}{a} \right)^3 \\ &= \frac{1}{3} \mu_{AB} \left(\frac{x}{a} \right)^3 \end{aligned} \quad (12)$$

と表されるので、それぞれの弾性荷重重心は②より $4b/5$ 、 $4a/5$ となる。したがって、モーメントによって生ずるたわみ角 α_{AB} 、 α_{BA} は次のようになる。

$$\alpha_{AB} = \frac{M_{AB} \ell}{3 E I} - \frac{M_{BA} \ell}{6 E I} + \frac{\mu_{AB} a}{12} - \frac{1}{60 \ell} (\mu_{AB} a^2 + \mu_{BA} b^2) \quad (13)$$

$$\alpha_{BA} = \frac{M_{BA} \ell}{3 E I} - \frac{M_{AB} \ell}{6 E I} + \frac{\mu_{BA} a}{12} - \frac{1}{60 \ell} (\mu_{AB} a^2 + \mu_{BA} b^2) \quad (14)$$

$$\therefore M_{AB} = \frac{2EI}{\ell} (2\theta_A - \theta_B - 3R_{AB}) - \frac{EI}{6\ell} \left\{ \mu_{AB} a \left(1 - \frac{a}{5\ell} \right) - \frac{\mu_{BA} b^2}{5\ell} \right\} \quad (15)$$

$$\therefore M_{AB} = \frac{2EI}{\ell} (2\theta_B - \theta_A - 3R_{AB}) - \frac{EI}{6\ell} \left\{ \mu_{BA} a \left(1 - \frac{b}{5\ell} \right) - \frac{\mu_{AB} a^2}{5\ell} \right\} \quad (16)$$

上式(15), (16)が応力とひずみの関係が3次式によって表される場合のはり部材のたわみ角方程式である。

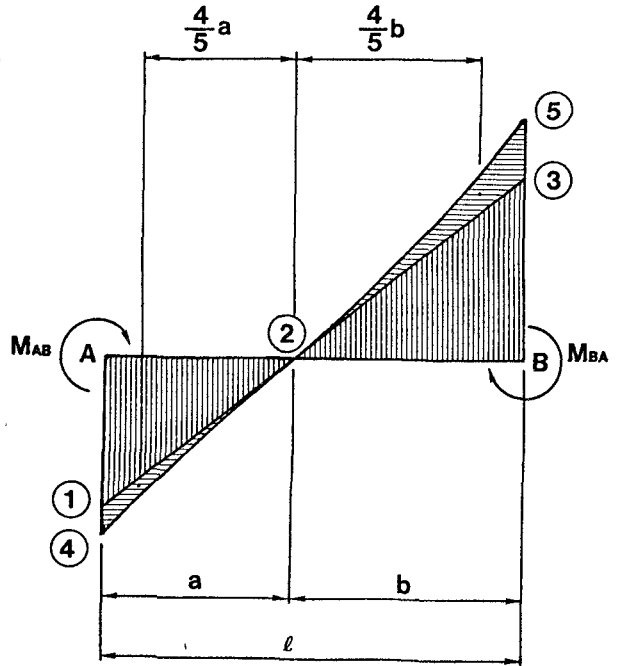


図-1 材端モーメントと非線形部材としてのモーメントを弾性荷重とした場合