

日本大学 正員 能町純雄

日本大学 正員 木田哲量

日本大学 正員 阿部 忠

日本大学 正員○澤野利章

1. 概 説 振動応答を解析する場合に振動によって生ずる応力, ひずみ, 変位等を $\sin$ 関数で近似することは一般的な手法である。また, 振動応答解析に当たっては, ある種の力学モデルを設定して行うことができる。本研究では, 弾性の力学モデルを非線形バネとした場合の振動応答に対して $\sin$ 関数で近似させることの妥当性についての考察を行う。対象とする構造体は図-1に示すような底盤に対して堅固に固定された層体を考える。これに振動が強制された場合の層体自身の運動方程式は式(1)によって表すことができる。

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

また, 弾性の力学モデルである非線形バネのひずみ r と応力の関係を式(2)とする。

$$\tau = G \left(r - \frac{r^2}{3 r_1} \right) \quad (2)$$

ここで, ρ ; 層体の密度,

u ; 強制振動外力による層体の変位,

G ; 層体の初期せん断弾性係数,

r ; 層体に生ずるひずみ, r_1 ; 層体のせん断応力

r_1 ; 最大せん断応力に対する最大ひずみ

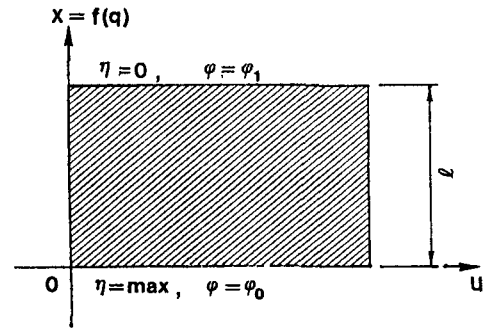


図-1 層体構造

2. 解析方法 層体の一般的な変位とひずみの関係より $r = \partial u / \partial x$ の関係が成り立つ。また, 変位 u は時間 t の関数であることから $u = U \sin \omega t$ とする。よって, ひずみ r は次式で表すことができる。

$$r = \frac{\partial U \sin \omega t}{\partial x} = r_1 \eta \sin \omega t \quad \therefore \eta = \frac{\partial U / \partial x}{r_1}$$

この関係を式(2)に代入すると, 式(3)となる。また, この応力-ひずみ関係を式(1)に代入すると式(4)を得ることができる。

$$\tau = G r_1 \left(\eta - \frac{\eta^2}{4} \right) \quad (3) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta - \frac{\eta^2}{4} \right) = - \frac{\rho \omega^2}{G r_1} U \quad (4)$$

ここで, $U = \ell^2 \phi r_1$, $\xi^2 = \omega^2 \rho \ell^2 / G$ とする。また, 底面からの距離 x を q を係数として表すこととして $x = q \ell$ とすると, 式(4)は次式となる。

$$\frac{\partial}{\partial q} \left(\eta - \frac{\eta^2}{4} \right) = - \xi^2 \phi \quad (5)$$

つまり,

$$\frac{\partial \phi}{\partial q} = \frac{\partial (U / \ell r_1)}{\partial (x / \ell)} = \frac{\partial U}{\partial x r_1} = \eta \quad (6)$$

の関係が成り立つ。次に式(5)に式(6)の関係を代入して, さらに η を乗ずることにする。

$$\frac{\partial \eta}{\partial q} - \frac{3}{4} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial q} \eta^2 = - \xi^2 \phi$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial q} \eta - \frac{3}{4} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial q} \eta^3 = -\xi^2 \psi \frac{\partial \psi}{\partial q} \quad (7)$$

上式 η を q によって積分することによってエネルギー式を得る。

$$\frac{1}{2} \eta^2 - \frac{3}{16} \eta^4 = \frac{1}{2} \xi^2 \psi^2 + C \quad (8)$$

ここで積分定数 C は境界条件 $q = 1$ で $x = \ell$, つまり $\eta = 0$ より定まる。すなわち,

$$C = -\frac{1}{2} \xi^2 \psi_1^2$$

ここで, ψ_1 は表面における ψ の値

この関係を式 (8) に代入することによって η は次式で表される。

$$\eta = \left[\frac{3}{4} \left\{ 1 \pm \left(1 - \frac{3}{2} \xi^2 (\psi_1^2 - \psi^2) \right)^{1/2} \right\}^{1/2} \right] \quad (9)$$

ここで再び境界条件を考える。すなわち, $\eta = 0$ を満足するときの $\psi_1 = \psi$ の場合は

$$\eta = \frac{\partial \psi}{\partial q} = \left[\frac{3}{4} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{3}{2} \xi^2 (\psi_1^2 - \psi^2) \right)^{1/2} \right\}^{1/2} \right] \quad (10)$$

となる。これより次式を得ることができる。

$$\psi, \xi \frac{\partial \psi}{\partial q} = \left(\frac{1}{2} \right)^{1/2} \frac{\{ 1 + (1 - A^2 \cos^2 \theta)^{1/2} \}^{1/2}}{\cos \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (11)$$

$$\text{ここで, } A = \frac{3}{2} \xi^2 \psi_1^2$$

したがって, ξ は次式によって表すことができる。

$$\xi = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \{ (1 + A \cos \theta)^{1/2} + (1 - A \cos \theta)^{1/2} \} \partial \theta \quad (12)$$

ここで, $\theta_0 = \sin^{-1}(m)$, $m = \psi_0 / \psi_1$, ψ_0 ; $q = 0$ の場合の ψ の値

$$\begin{aligned} \xi = & \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n-3)!! A^{2n}}{2^n n! 2^{2n}} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \left(\frac{2n}{n} \right) \right) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}} \cdot \frac{(4n-3)!! A^{2n}}{2^n n! 2^{2n}} \sum_{r=0}^{n-1} \left(\frac{2n}{r} \right) \frac{\sin^2(n-r)\theta_0}{2(n-r)^2} \end{aligned} \quad (13)$$

3. 解析結果 式 (13) によって ξ を求めると

変数 A と級数項が複雑になるため, 本解析では式

(12) に対して図式積分を行なって ξ を求め, この ξ , A , θ_0 の関係より加速度 α は

$$\alpha = A \xi / (3/2)^{1/2} \quad (14)$$

によって算出し, 入力 P は

$$P = A \xi m / (3/2)^{1/2} \quad (15)$$

によって算出して図-2に示した。図中の破線が本解析によって得られた加速度パラメータであり, また実線は $\sin$ 関数によって変位を仮定した場合の加速度パラメータである。また, 入力 P は中心から外側に向かって 0, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20 としている。

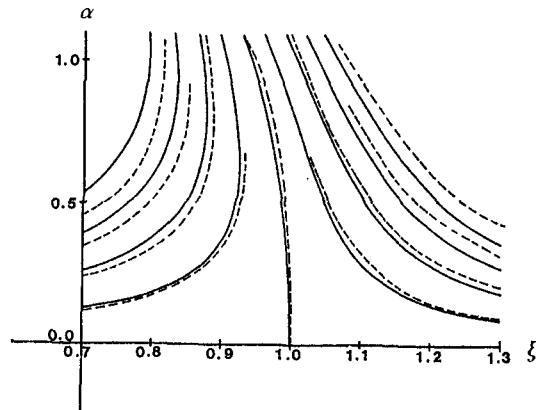


図-2 解析結果