

(1-14) 時刻歴感度解析に関する一考察

東京電機大学 理工学部 正 員○松井邦人
 国土舘大学 工学部 正 員 菊田征勇
 東京電機大学 大学院 学生員 栗田哲史

1 はじめに

時刻歴感度解析は、動的領域で、部分的な設計変更、最適設計、構造同定、構造最適制御等において重要である。動的な感度を求める方法として、1) 差分に基づく方法、2) 固有値、固有ベクトルの感度から求める方法、3) 運動方程式から得られる感度方程式を解く方法、の3種類が考えられる。ここでは3)に基づく方法について、その解法と適用範囲について検討する。

2 感度方程式とその解法

運動方程式は、次のように記すことができる。

$$M \ddot{z} + C \dot{z} + K z = Q(x, t) \quad (1)$$

$$z(0) = \dot{z}(0) = 0 \quad (2)$$

但し、M: 質量マトリックス、C: 減衰マトリックス、K: 剛性マトリックス、z、 $\dot{z}$ 、 $\ddot{z}$ はそれぞれ変位、速度、加速度ベクトルである。また、M、C、K、Qは通常設計変数ベクトルxの関数である。

式(1)、(2)より感度方程式は

$$M \frac{\partial \ddot{z}}{\partial x_j} + C \frac{\partial \dot{z}}{\partial x_j} + K \frac{\partial z}{\partial x_j} = \frac{\partial Q}{\partial x_j} - \frac{\partial M}{\partial x_j} \ddot{z} - \frac{\partial C}{\partial x_j} \dot{z} - \frac{\partial K}{\partial x_j} z \quad (3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_j}(0) = \frac{\partial \dot{z}}{\partial x_j}(0) = 0 \quad j=1 \sim M \quad (4)$$

上式は $\frac{\partial z}{\partial x_j}$ に関する2回の微分方程式であり、運動方程式と同様の方法を用いて解くことができる。また式(3)、(4)は、最適制御で用いられる随伴変数を用い次のように解くことが可能である。今式(3)に、随伴変数 $\lambda(\tau)$ を掛け、(0, t) で積分する。

$$\int_0^t \lambda_j^T \left(M \frac{\partial \ddot{z}}{\partial x_j} + C \frac{\partial \dot{z}}{\partial x_j} + K \frac{\partial z}{\partial x_j} \right) d\tau$$

上式を部分積分すると

$$\begin{aligned} & \lambda_j^T \left(M \frac{\partial \dot{z}}{\partial x_j} + C \frac{\partial z}{\partial x_j} \right) \Big|_0^t - \lambda_j^T \frac{\partial z}{\partial x_j} \Big|_0^t \\ & + \int_0^t (\lambda_j^T M - \lambda_j^T C + \lambda_j^T K) \frac{\partial z}{\partial x_j} d\tau \\ & = \int_0^t \lambda_j^T \left(\frac{\partial Q}{\partial x_j} - \frac{\partial M}{\partial x_j} \ddot{z} - \frac{\partial C}{\partial x_j} \dot{z} - \frac{\partial K}{\partial x_j} z \right) d\tau \end{aligned} \quad (6)$$

M、C、Kの対称性を考慮すると、 λ_j を

$$M \dot{\lambda} - C \lambda + K \lambda = 0 \quad (7)$$

$$\lambda(t) = 0, M \lambda(t) = 0 \quad (8)$$

を満足するように決定すると、式(6)より

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_j} = & \int_0^t \lambda_j^T \left(\frac{\partial Q}{\partial x_j} - \frac{\partial M}{\partial x_j} \ddot{z} - \frac{\partial C}{\partial x_j} \dot{z} - \frac{\partial K}{\partial x_j} z \right) d\tau \end{aligned} \quad (9)$$

式(7)、(8)は、式(1)、(2)と比較すると、1階の導関数の符号が異なっている、また初期条件の変わりに終端条件が与えられる。 $\xi = t - \tau$ とすると

$$\frac{d\lambda_j}{d\tau} = \frac{d\lambda_j}{d\xi} \frac{d\xi}{d\tau} = - \frac{d\lambda_j}{d\xi},$$

$$\frac{d^2 \lambda_j}{d\tau^2} = \frac{d^2 \lambda_j}{d\xi^2} \quad (10)$$

となり、式(7)、(8)は次式の初期値問題となる。

$$M \dot{\lambda}_j(\xi) + C \lambda_j(\xi) + K \lambda_j(\xi) = 0 \quad (11)$$

$$\lambda_j(0) = 0, \quad M \lambda_j(0) = -I_j \quad (12)$$

但し、 I_j はj番目が1、他は0のベクトルである。上式は、式(1)、(2)と同じ方法で解くことが可能である。式(3)、(4)を直接解く方法を直接法、随伴変数を用いる方法を随伴法と呼ぶことにする。

3 精度と適用範囲

随伴法は理論的に洗練された方法である。しかし式(1)、(2)の解であり、表現形式は異なっているだけである。このことを1自由度系の運動方程式を用いて示す。運動方程式は

$$\ddot{y} + 2h\omega \dot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (13)$$

$$y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0 \quad (14)$$

式(13)、(14)の解は

$$y = e^{-h\omega t} \left\{ \cos \omega \sqrt{1-h^2} t + \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega \sqrt{1-h^2} t \right\} \quad (15)$$

今、設計変数を ω とすると、感度方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{y}}{d\omega} + 2h\omega \frac{d\dot{y}}{d\omega} + \omega^2 \frac{dy}{d\omega} \\ = -2h\dot{y} - 2\omega y \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{dy}{d\omega}(0) = \frac{d\dot{y}}{d\omega}(0) = 0 \quad (17)$$

随伴方程式(7)、(8)は

$$\dot{\lambda} - 2h\omega\lambda + \omega^2\lambda = 0 \quad (18)$$

$$\lambda(t) = 0, \quad \lambda(t) = -1 \quad (19)$$

随伴変数を用いると、式(16)、(17)の解は

$$\frac{d\dot{y}}{d\omega}(t) = \int_0^t \lambda(\tau) (-2h\dot{y} - 2\omega y) d\tau \quad (20)$$

と書くことができる。また、式(18)、(19)を解くと

$$\lambda(\tau) = \frac{1}{\omega\sqrt{1-h^2}} e^{-h\omega(t-\tau)} \sin\omega\sqrt{1-h^2}(t-\tau) \quad (21)$$

式(21)より、式(20)は式(16)、(17)の解のDuhamel積分表示である。従って感度解析には直接法が便利であり、随伴法を用いるメリットは、ほとんど無いと考えられる。

感度解析の精度を示すため、式(13)で $\omega = 4\text{rad/s}$ とし、 $\delta\omega$ を5%, 10%, 20%変化させ、感度解析の結果

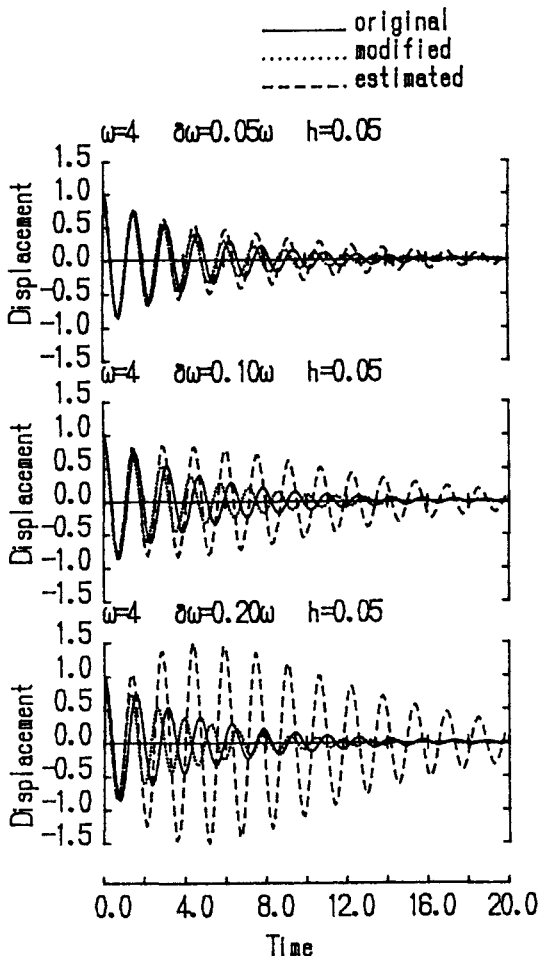


Fig-1 Accuracy on Sensitivity
(Free Vibration)

を用いた推定応答と、式(13)の ω の値を変え再度解き直した結果を図1に示す。自由振動の結果と比較するため、式(13)の右辺に $A\theta^2\sin\theta t$ が作用した場合の定常解を求めた。但し、 $\omega = 2\text{rad/s}$, $A=1$, $\theta = 4\text{rad/s}$ 及び $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ の条件で解析を行った。 $\delta\omega$ を5%, 10%, 20%が得たときの、定常応答変位の推定値と理論解の結果を図2に示す。

4 あとがき

本研究で用いている手法では、定常状態の応答に関する感度は非常に精度が良い。しかし、自由振動の場合、感度の精度が悪くなる。この原因は、 ω が変化することにより、系の固有周期が変わるためである。自由振動、過渡現象に対して精度良い感度解析を行うためには、固有値の変化を考慮する必要があると思われる。

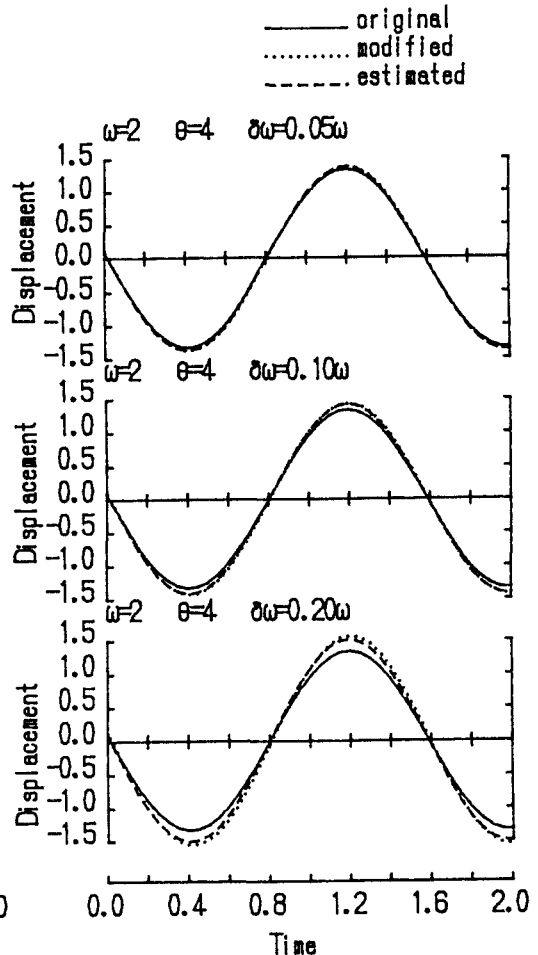


Fig-2 Accuracy on Sensitivity
(Steady State Vibration)