

対称荷重を受ける対称形ラーメン構造物の座屈解析

東京都立大学 学生員○木村 英明

東京都立大学 正 員 野上 邦栄

東京都立大学 正 員 伊藤 文人

1. まえがき 骨組構造物の強度評価に重要となる弾性座屈荷重の求め方には、種々の解法がある^{1) 2)}。しかし多径間からなる複雑な骨組構造物に対してこれらの解法を用いる時、構造物の構成部材が増加するにつれ特性方程式が複雑になり数値解を得るのが困難になる。しかし、吊橋や斜張橋の主塔のようなラーメン構造がその中心に対して対称性を持つ場合に、対称な荷重を受ける時の挙動を求めるのであれば、その対称性を利用して変数の数を半減させることができる。本報告では、台型ラーメンを対象にして、上記の特性を考慮した独自の変位の変数変換を行うことにより、比較的扱いやすい固有値解析法の定式化を行っている。

2. 基礎式 いま梁は常に水平であり、塔柱は左右対称な角度 ϕ を持ち、断面形および長さはそれぞれ互いに等しいとする図1のようなラーメン構造を考える。節点(i)の変位および荷重を $\Delta_i = (w_i, v_i, -v'_i)$, $f_i = (P_i, Q_i, M_i)$ で表し、左右塔柱を添え字LおよびRで区別することにする時、任意の左側および右側塔柱の対応する4節点の変位について次のような変数変換を行うことにする。

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{iL} &= \bar{\Delta}_i + \dot{\Delta}_i, \Delta_{jL} = \bar{\Delta}_j + \dot{\Delta}_j, f_{iL} = \bar{f}_i + \dot{f}_i, f_{jL} = \bar{f}_j + \dot{f}_j \\ \Delta_{iR} &= \bar{\Delta}_i - \dot{\Delta}_i, \Delta_{jR} = \bar{\Delta}_j - \dot{\Delta}_j, f_{iR} = \bar{f}_i - \dot{f}_i, f_{jR} = \bar{f}_j - \dot{f}_j \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

ここで $(\bar{}), (\dot{})$ は各々平均成分および偏差成分を表すものである。式(1)を用いて変数変換された柱の釣合い方程式は、要素剛性行列を K と置く時、次式のように対称および逆対称に分離して表すことができる。

$$K \delta^S = F^S, K \delta^U = F^U \dots \dots \dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta^S &= (\bar{w}_i, \bar{v}_i, \bar{v}'_i, \bar{w}_j, \bar{v}_j, \bar{v}'_j)^T, F^S = (\bar{P}_i, \bar{Q}_i, \bar{M}_i, \bar{P}_j, \bar{Q}_j, \bar{M}_j)^T \\ \delta^U &= (\dot{w}_i, \dot{v}_i, \dot{v}'_i, \dot{w}_j, \dot{v}_j, \dot{v}'_j)^T, F^U = (\dot{P}_i, \dot{Q}_i, \dot{M}_i, \dot{P}_j, \dot{Q}_j, \dot{M}_j)^T \\ K &= \begin{bmatrix} K_{11}, & K_{12}, & K_{13}, & -K_{11}, & -K_{12}, & K_{13} \\ & K_{22}, & K_{23}, & -K_{12}, & -K_{22}, & K_{23} \\ & & K_{33}, & -K_{13}, & -K_{23}, & K_{36} \\ & & & K_{11}, & K_{12}, & -K_{13} \\ & & & & K_{22}, & -K_{23} \\ & & & & & K_{36} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} (3)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} K_{11} &= k_{11} \phi_c^2 + k_{22} \phi_s^2, K_{22} = k_{11} \phi_s^2 + k_{22} \phi_c^2, K_{33} = k_{33} \\ K_{12} &= (k_{11} - k_{12}) \phi_c \phi_s, K_{23} = -k_{23} \phi_c, K_{36} = k_{36} \\ K_{13} &= k_{23} \phi_s, \phi_s = \sin \phi, \phi_c = \cos \phi \end{aligned} \right\} (4)$$

$$\left. \begin{aligned} k_{11} &= E A_c / L, k_{22} = 12 E I_c / L^3, k_{33} = 4 E I_c / L \cdot 3(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) / \alpha^3 g \\ k_{23} &= 6 E I_c / L^3 \cdot 2 \sin \alpha / \alpha g, k_{36} = 2 E I_c / L \cdot 6(\alpha - \alpha \sin \alpha) / \alpha^3 g \\ g &= 12 / \alpha^4 \{ 2(1 - \cos \alpha) - \alpha \sin \alpha \}, \alpha^2 = P L^2 / E I_c \end{aligned} \right\} \dots \dots (5)$$

である。式中の A_c, I_c, L は柱の断面積、断面2次モーメントおよび部材長である。同様にして水平な梁の釣り合い方程式は次式のように書くことができる。

$$\begin{bmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & 2k_{11}^B, & 0 \\ 0, & 0, & k_{33}^B - k_{36}^B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w}_i \\ \dot{v}_i \\ \dot{v}'_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_i \\ \dot{Q}_i \\ \dot{M}_i \end{Bmatrix}, \begin{bmatrix} 2k_{22}^B, & 0, & 2k_{23}^B \\ 0, & 0, & 0 \\ 2k_{23}^B, & 0, & k_{33}^B + k_{36}^B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{v}'_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{P}_i \\ \bar{Q}_i \\ \bar{M}_i \end{Bmatrix} \quad (6)$$

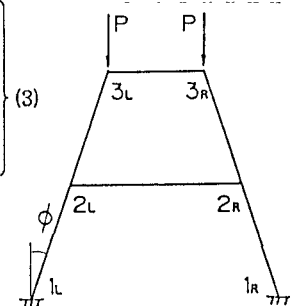


図1

$k_{11}^B = EA_b/B$, $k_{22}^B = 12EI_b/B^3$, $k_{33}^B = 4EI_b/B$, $k_{23}^B = 6EI_b/B^3$, $k_{36}^B = 2EI_b/B$ である。式中の A_b , I_b , B は梁の断面積、断面2次モーメントおよび部材長である。

3. 解析手法 さて、斜め部材を持つラーメンの1例として図2に示すような下端固定の台型1層ラーメンを考える。その釣り合い方程式は、式(2)および式(6)により次式のような形になる。

$$\begin{pmatrix} K_{11} + 2k_{22}^B & K_{12} & K_{13} + 2k_{23}^B \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} \\ K_{13} + 2k_{23}^B & K_{23} & K_{33} + 2k_{33}^B + k_{36}^B \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{v} \\ \ddot{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdots (7)$$

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12} & K_{22} + 2k_{11}^B & K_{23} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} + k_{33}^B - k_{36}^B \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{v} \\ \ddot{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdots (8)$$

式(7)は逆対称座屈モードに対する特性方程式であり、式(8)が対称変形に対する基礎方程式である。また、柱の軸力は式(2)の第1式および式(6)の第1式により次式で与えられる。

$$\alpha^2/2 = (K_{11}\cos\phi + K_{12}\sin\phi)\ddot{w} + (K_{12}\cos\phi + K_{22}\sin\phi)\dot{v} - (K_{13}\cos\phi + K_{23}\sin\phi)\dot{v} \cdots (9)$$

式(7)～式(9)を用いた座屈解析の流れ図が図3である。

4. 数値計算結果 図3に従って解析した結果の一例を図4に示す。ここでは柱の L/r および L/B を一定とし、 $r = I_b L / I_c B$ をパラメーターにして角度 ϕ に対する有効座屈長 β の変化を求めた。

得られた結果から、 $r > 0.5$ では柱を $\phi = 0.12\pi$ に傾けることがラーメン全体としての安定を増加させる効果があるといえる。斜張橋においてしばしばA形または台形の主塔が採用されているが、安定を高める上で極めて有効な方法であることが知られる。

参考文献 1) 福本, 新体系土木工学9 構造物の座屈・安定解析, 技報堂出版, 1982

2) 福本・西野, 鋼構造部材と骨組, 丸善, 昭和45年

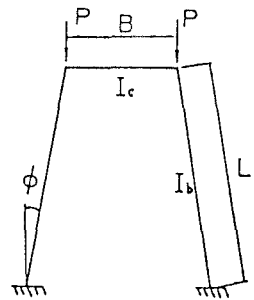


図2

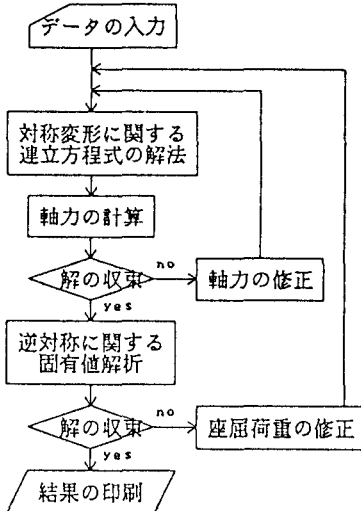


図3

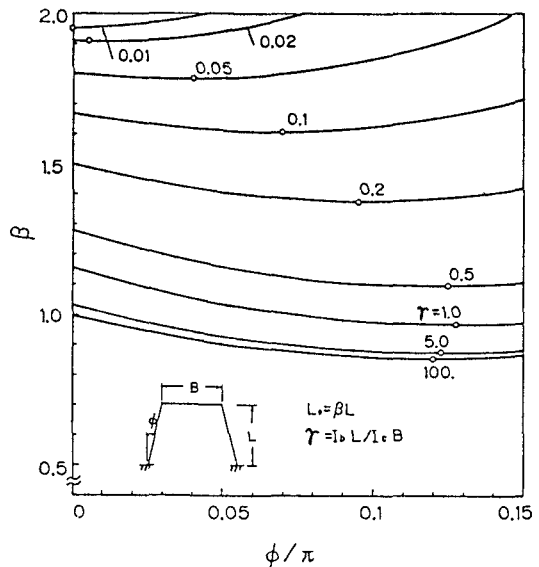


図4