

(1-2) 半無限弾性体上におかれた極異方性板の挙動について

○新潟大学工学部 正員 阿部 和久
新潟大学工学部 学生 服部 正典

1. はじめに 半無限弾性体上におかれた板の問題は、地盤上にある構造物を初めとする多くの問題のモデル化として扱われて来た。従来の研究には、無限に広がる平板を扱ったものや、有限径を有する円盤、又は任意形状の板を扱ったものなどがあり、荷重条件にも、集中荷重、等分布荷重等、様々なものがある。又、半無限体には等方均質弾性体を用いたものを初め、深さ方向への弾性率の変化を考慮に入れたもの、直交異方性体としたものなどが取扱われて来た¹⁾。

一方、本報告では、半無限弾性体上におかれた円盤が極異方性を有する場合について、その異方性の度合が円盤自由端部の浮き上がりに対して及ぼす影響を調べ、若干の考察を与えた。

2. モデル化 半無限体は等方均質弾性体とし、せん断弾性係数を G 、Poisson 比を ν とする。又、座標には図-1に示す円筒座標系を用い、半径方向に r 、半無限体の表面から下向きに z 軸をとる。円盤は微小変形理論に従うものとし、その半径を R 、半径方向の曲げ剛性を D_r 、円周方向の曲げ剛性を D_θ とする。なお、本研究では D_r 、 D_θ は一定とし、半径方向に変化しないものとした。更に、接触面において摩擦は生じないものとする。荷重条件としては、円盤の中心に集中荷重 P が作用する場合を考える。

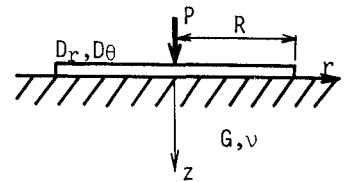


図-1 座標系および半無限体と円盤の諸条件

3. 問題の定式化 本研究では問題を解くにあたり、Green 関数を核関数とした積分方程式に基づく定式化を行った。まず、図-2のように、円盤と半無限体とが半径 $r = a \leq R$ の内側で接触しているものとすれば、接触圧 p は $r \leq a$ において分布し、それより外側ではゼロとなる。このときの円盤のたわみ $w(r)$ は次式で与えられる。

$$w(r) = w(R) + \frac{P}{2\pi} \cdot w^*(r, 0) - \int_0^a \rho w^*(r, \rho) \cdot p(\rho) d\rho \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $w^*(r, \rho)$ は次に示す微分方程式および境界条件をみたす Green 関数である。

$$\frac{d}{d\rho} \left[\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d^2 w^*}{d\rho^2} \right) - \frac{\alpha}{\rho} \cdot \frac{dw^*}{d\rho} \right] = \frac{1}{D_r} \delta(\rho - r) \quad \dots\dots\dots (2.a)$$

$$\left(\frac{d^3 w^*}{d\rho^3} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d^2 w^*}{d\rho^2} - \frac{\alpha}{\rho^2} \cdot \frac{dw^*}{d\rho} \right) \Big|_{\rho=R} = \frac{1}{R \cdot D_r} \quad \dots\dots\dots (2.b)$$

$$\left(\frac{d^2 w^*}{d\rho^2} + \frac{D_\nu}{\rho} \cdot \frac{dw^*}{d\rho} \right) \Big|_{\rho=R} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.c)$$

式(2)において $\alpha = D_\theta/D_r$ は異方性の度合を示すパラメーターであり、 D_ν は等方性体の Poisson 比に対応する無次元量である。ここでは特に、異方性板に対して用いられる近似関係²⁾より $D_\nu = \nu_D \sqrt{\alpha}$ と仮定した。ここで ν_D は等方性材 ($\alpha=1$) の Poisson 比であり、 $\nu_D=0.25$ とした。又、式(2.a)における δ は Dirac のデルタ関数である。

式(2)をみたす関数 w^* は次式のようになる。

$$w^*(r, \rho) = \frac{r^2}{2D_r(1-\alpha)} + \frac{r^{1-\sqrt{\alpha}} \cdot \rho^{1+\sqrt{\alpha}}}{2D_r\sqrt{\alpha}(1-\alpha)} - \frac{1}{(1+\sqrt{\alpha})(D_\nu+\sqrt{\alpha})(1-\alpha)D_r} \left[(1+\sqrt{\alpha})R^{1-\sqrt{\alpha}}(\rho^{1+\sqrt{\alpha}}+r^{1+\sqrt{\alpha}}) + \frac{(1-\sqrt{\alpha})(D_\nu-\sqrt{\alpha})}{2\sqrt{\alpha}} R^{-\sqrt{\alpha}} r^{1+\sqrt{\alpha}} \rho^{1+\sqrt{\alpha}} \right] \quad (\alpha \neq 1) \quad (\rho < r \leq R) \quad \dots\dots\dots (3)$$

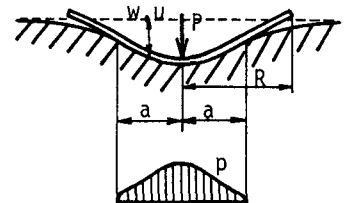


図-2 接触域の変位と接触圧分布

$r < \rho \leq R$ の場合には式(3)において r と ρ とを入れ換えれば良い。

次に、半無限体の表面 $z=0$ での鉛直変位 u を次式により定義する。

$$u(r) = \int_0^a U^*(r, \rho) \cdot p(\rho) \, d\rho \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 U^* は Boussinesq の解より求められる基本解であり、次式で与えられる。

$$U^*(r, \rho) = \frac{2\rho(1-\nu)}{\pi G(r+\rho)} \cdot K(k), \quad k^2 = \frac{4\rho r}{(r+\rho)^2} \quad \dots\dots\dots (5)$$

式(5)で、 $K(k)$ は第一種完全楕円積分である。

式(1)の w と式(4)の u とを接触域 $r \leq a$ に対して等しくおき無次元化すれば、最終的に次の積分方程式を得る。

$$\frac{\omega}{2\pi} \cdot \bar{w}^*(\bar{r}, 0) = -\bar{w}(\bar{R}) + \int_0^1 \bar{K}^*(\bar{r}, \bar{\rho}) \cdot \bar{p}(\bar{\rho}) \, d\bar{\rho} \quad (\bar{r} \leq 1) \quad \dots\dots\dots (6.a)$$

$$\bar{K}^*(\bar{r}, \bar{\rho}) = \bar{U}^*(\bar{r}, \bar{\rho}) + \omega \bar{\rho} \bar{w}^*(\bar{r}, \bar{\rho}) \quad \dots\dots\dots (6.b)$$

ここで、 $\bar{R}=R/a, \bar{r}=r/a, \bar{\rho}=\rho/a$ であり、 $\omega = \frac{a^3 G}{D_r(1-\nu)}, \bar{w}(\bar{r}) = \frac{aG}{P(1-\nu)} w(r), \bar{p}(\bar{r}) = \frac{a^2}{P} p(r)$ である。又、核関数 $\bar{w}^*, \bar{U}^*$ はそれぞれ、 $\bar{w}^* = (D_r/a^2) w^*, \bar{U}^* = (G/(1-\nu)) U^*$ で与えられる。なお、式(6)は半無限体の材料定数 G, ν に依存せず、 $\omega, \alpha, \bar{R}$ の3つをパラメーターに持つ方程式となる。

更に、接触圧と外荷重との釣り合い条件より、次式を得る。

$$\frac{1}{2\pi} = \int_0^1 \bar{\rho} \cdot \bar{p}(\bar{\rho}) \, d\bar{\rho} \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(6), (7)によって、解くべき積分方程式が与えられる。

4. 離散化および解法 式(6), (7)において接触圧分布 $\bar{p}$ と円盤の自由端におけるたわみ $\bar{w}(\bar{R})$ は未知である。これらを求めるために、 $0 \leq \bar{\rho} \leq 1$ の範囲を一次要素で分割し、それにより $\bar{p}$ の分布を表わした。式(6), (7)を離散化した後、式(6)に選点法を適用すれば代数方程式に帰着する。これより $\bar{p}, \bar{w}(\bar{R})$ が求まる。

又、ある接触域比 $\bar{R}=R/a$ での解を求めるために、 $\bar{R}$ と α が一定の下で ω を変化させ、接触端部 $\bar{\rho}=1$ における $\bar{p}$ の値を十分ゼロに近くする時の ω を求め、それに対する結果を解とした。なお、真の解では $\bar{p}(1)=0$ となるが、ここでは $|\bar{p}(1)| \leq \bar{p}(0)/100$ を判定条件に用いた。

5. 計算結果および考察 以上の方法で得られた結果より、異方性の度合を示すパラメーター $\alpha, 1/\bar{R}$ および $\omega \bar{R}^3 (= R^3 G/D_r(1-\nu))$ の関係を図-3 のようになる。この図より、ある $\alpha, R^3 G/D_r(1-\nu)$ を有する系での、接触域の全半径に対する比 $1/\bar{R}=a/R$ を求めることができる。一方、 $\alpha, 1/\bar{R}, \omega \bar{R}^3 / \alpha (= R^3 G/D_\theta(1-\nu))$ の関係は図-4 のようになる。図-3, 4 で R, G, ν は一定とすれば、図-3 は $\alpha, \bar{R}, D_r$ の関係を示し、図-4 は $\alpha, \bar{R}, D_\theta$ の関係を示す図となる。すると、一定の $\bar{R}$ の下で異方性の度合 α を変える場合、 α の変化は主に D_r の変化によるものであり、 D_θ はそれに比べ、殆ど変化しないことがわかる。

6. おわりに 極異方性を有する円盤と半無限体との接触問題を Green 関数を核関数とした積分方程式により定式化し、選点法を用いて解いた。その結果より、円盤の全半径と接触域の比 $\bar{R}$ 、異方性の度合を示すパラメーター α および円盤の半径方向の曲げ剛性 D_r 、円周方向の曲げ剛性 D_θ の関係を求めた。

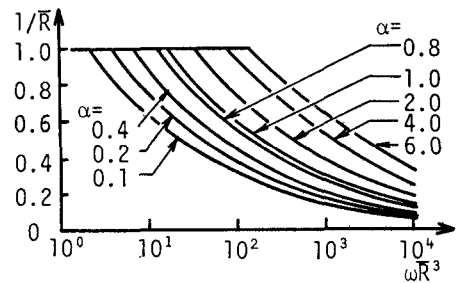


図-3 $\alpha, 1/\bar{R}, R^3 G/D_r(1-\nu)$ の関係

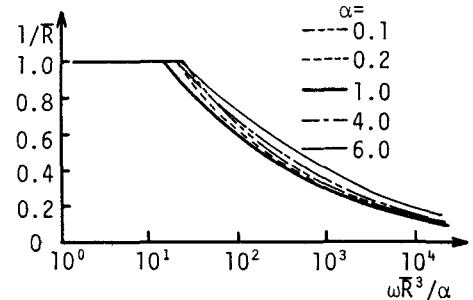


図-4 $\alpha, 1/\bar{R}, R^3 G/D_\theta(1-\nu)$ の関係

- (参考文献) 1) Selvadurai, A.P.S., Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction., Elsevier, 1979
2) Troitsky, M.S., Stiffened Plates, Bending, Stability and Vibrations., Elsevier, 1976