(Ⅳ －13)

離散増設容量道路ネットワークデザイン問題の近似解法

早稲田大学　学生員　片山　直登
早稲田大学　　　　　春日井　博

1.はじめに

近年、大都市および周辺部では自動車利用数が増大し，交通渋滞，エネルギー消費の増加や自動車公害等の問題が生じている。これらの問題を緩和するために道路の幅を拡張する交通容量の増強が行われている。道路ネットワークデザイン問題は，最適な拡張すべき道路の選択と増設容量を決定する問題である。

道路ネットワークデザイン問題では増設容量が離散値つまり車線単位の増設と連続量つまり車線の幅の拡張が考えられる。前者を離散増設容量道路ネットワークデザイン問題，後者を連続増設容量道路ネットワークデザイン問題と呼ぶことにする。

本研究では，離散増設容量道路ネットワークデザイン問題に対する効率的な近似解法を提案する。この解法は近似解（実行可能解）と同時に下界値も計算できるため最適解との誤差を得ることができる。

2.用語の定義

ある地域をゾーンに分割して，それぞれのゾーンから他のゾーンへの混雑時の単位時間あたりの交通量が与えられているものとし，隣接するゾーン間には道路が存在するものとする。このゾーンをノード、各ゾーン間の交通をＯＤ交通，各ゾーン間の単位時間あたりの交通量をＯＤ交通量、ゾーン間の道路をリンク、ノードおよびリンクの集合を道路ネットワークと呼ぶ。リンク間の個々のＯＤ交通の走行時間をリンク走行時間と呼ぶ。

既存のリンクの幅を増加させることをリンク容量を増設すると呼び、この容量をリンク増設容量と呼ぶ。増設するリンクを容量増設リンクと呼ぶ。各ＯＤ間において個々の交通が走行時間最小のルートのみを走行するような均衡状態をユーザー均衡と呼ぶ。

道路ネットワーク内において，ユーザー均衡状態になるように交通量を各リンク間に割り当てることを交通量配分問題と呼び，この問題を解くことを交通量を配分すると呼ぶことにする。道路ネットワークデザイン問題は，ネットワーク内において，ユーザー均衡状態における目的関数値が最小になるようなリンクの増設容量を決定する問題とする。

2.従来の研究

Poorzahedy and Turnquist[2]は優越解集合に対して近似解法を提案している。この近似解法はすべての優越解を列挙し，これらに対し近似のFrank-Wolfe法（FW法）を適用している。しかし問題の規模が大きくなると優越解の数が指数的に増大することから大規模な問題には適用が困難であり，増設リンク数が10程度までしか解くことができない。

3.問題の定式化

離散増設容量道路ネットワークデザイン問題（問題P）は次のように表される。[1]

$$\mathrm{P} \mid \min \sum_{\ell \in L} \int_0^{y_\ell} c_\ell(z, x_\ell)\,dz \qquad (1)$$

s.t.

$$\sum_{\ell \in a(j)} y_\ell^s - \sum_{\ell \in b(j)} y_\ell^s = \begin{cases} D_j^s & j:\text{sの出先} \\ -D_j^s & j:\text{sの入先} \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \qquad j \in N, s \in Q \qquad (2)$$

$$y_\ell = \sum_{s \in Q} y_\ell^s \qquad \ell \in L \qquad (3)$$

$$\sum_{\ell \in L} e_\ell \cdot x_\ell \leqq B \qquad (4)$$

$$y_\ell^s \geqq 0 \qquad \ell \in L, s \in Q \qquad (5)$$

$$x_\ell \in \{0, 1\} \qquad \ell \in L \qquad (6)$$

c_ℓ ：リンクℓの走行時間関数
y_ℓ^s：リンクℓを走行するＯＤ交通sの交通量
y_ℓ ：リンクℓを走行する交通量
x_ℓ ：リンクℓのリンク増設車線数
e_ℓ ：リンクℓのリンクを建設費用、増設不可能の場合には$e_\ell > B$なるe_ℓとする。
a(j)：ノードjを終端とするリンクの集合
b(j)：ノードjを始端とするリンクの集合
B：容量増設費用　　N：ノードの集合
Q：ＯＤ交通の集合　　L：リンクの集合
D_j^s：jを起点とするs番目のＯＤ交通の交通量

(1)はユーザー均衡状態における目的関数，(2)(3)はＯＤフロー整合条件、(4)は容量増設費用条件を表す。

4.ラグランジュ緩和問題

問題Pに関して，容量増設費用条件(4)に対する

ラグランジュ緩和（問題R）を考える。

$$R \mid \min \sum_{l \in L} \int_0^{y_l} c_l(z, x_l)dz + \lambda(\sum_{l \in L} e_l x_l - B) \quad (7)$$

$$\text{s.t.} \quad y \in FLOW \quad (8)$$

$$x_l = \{0,1\} \quad l \in L \quad (9)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (10)$$

FLOW:(2)(3)(5)式を満たすフローパターン

問題Rは問題Pの緩和問題であるので，問題Rの最適解は問題Pの下界値となる。

5.近似解

ラグランジュ緩和問題Rの最適解が問題Pの下界値となる。しかし，この解における x は(4)を緩和しているので，必ずしも実行可能解ではない。しかし，

$$\sum e_l \cdot x_l - B \leq 0 \quad (11)$$

なる最小の非負のλを選ぶと下界値は悪くなるが，x は実行可能解となる。問題Pの実行可能解の目的関数値は、ラグランジュ緩和問題Rの目的関数値に(1)と(7)の差

$$-\lambda(\sum e_l \cdot x_l - B) \quad (12)$$

を加えることで容易に求められる。

なぜならば、ラグランジュ緩和問題Rの最適解における y を用いると、y に関しては，(12)の項には依存しない。このため緩和問題の収束状態と同じであるので，y は収束していることになる。このため x も収束していることになり，ネットワークデザイン問題Pの実行可能解となる。この実行可能解を近似解とする。

このように上界値（近似解、実行可能解）と下界値（緩和問題の最適解）を同時に算出することができるので，近似解と最適解（正確には下界値）の誤差も求めることができる。

6.解法

問題Pの x_l は 0-1変数であるので走行時間関数 c_l を，x_l が 0であるときの走行時間関数 c_{0l}，x_l が 1であるときの走行時間関数 c_{1l} によって、問題Rと等価な問題TRで置き換えて考える。問題TRは次式で表せることになる。

$$\text{問題TR} \mid \min G = \sum_{l \in L} \int_0^{y_l} c_{0l}(z)dz - \lambda B$$

$$+ \sum_{l \in L} x_l \{\int_0^{y_l} c_{1l}(z)dz - \int_0^{y_l} c_{0l}(z)dz + e_l \lambda\} \quad (13)$$

問題TRの x に対する連続緩和問題TRCを考える。問題TRCにおいて，イテレーション中の x を用いて，y に対してFW法を適用する。λは(11)を満たすようにイテレーションごとに改善する。イテレーション中の y_l を用いて，x に対しては最急降下法を適用する。

x に関する制約は 0-1の有界制約だけなので，x に対する勾配より，次の点 x は，

$$x_l = 0 (\nabla_{x_l} G \geq 0) \quad x_l = 1 (\nabla_{x_l} G < 0) \quad (14)$$

で求められる。よって，x は常に 0または 1であるので問題TRCの最適解は，問題TRと問題Rの最適解になる。

7.数値例

ノード数 6～30のネットワークに対して計算を行った。

表1.結果

ノード数	リンク数	誤差(%)	近似解法の計算量	配分問題の計算量
6	16	5.1	39.2	39.1
9	24	7.7	82.9	81.9
20	62	3.3	53.6	52.2
30	98	1.7	34.4	35.4

ただし，計算量はFW法のイテレーション回数，誤差は近似解と下界値の差

7.結論

離散増設容量道路ネットワークデザイン問題に対する近似解法を提案した。また数値例によって交通量配分問題を解くのと同じ程度の計算量で，誤差 5%程度の近似解を得られることを示した。

参考文献

1)Friesz T.L.:"Transportation network equilibrium,design and aggregation :key developments and research opportunities", Transpn.Res.19A(4),(1985)p413-427

2)Poorzahedy H.and Turnquist M.A.:"Approximate algorithms for the discrete network design problem",Transpn Res.16B(1),(1982)p45-56