

1. はじめに

流体粒子の均質性を仮定し、それらの各点が速度に関する3個の自由度を有するものとして確立された古典流体力学に対して、個々の流体粒子がさらに速度と独立した固有回転の3個の自由度を有する、いわゆる微視構造をもつ流体の力学が、最近注目されはじめている。たとえば、従来の古典理論では十分に説明しがたい現象へのこの種の理論の適用例として、新しい乱流モデル¹⁾、不均質な混相流、非ニュートン流体や生体内の流動現象などの内部構造をもつ流体²⁾、液晶³⁾、電磁流体等が列挙される。しかし、この流体の力学はまだ学問的に完全には体系化されておらず、今後多くの実際問題に適用して、その位置づけと見直しが行われなければならないのが現状である。本研究は、この微視構造(内部構造)を有する流体の力学概念についてその概要を述べ、この理論を周期的な圧力こう配の作用する平行平板間の振動的な非定常流れ問題に適用し、従来の古典解との比較を行い、新しい知見を得ようとするものである。

2. 微視構造を有する流体の力学の概要

微視構造を有する流体では主に二つの物理概念が導入されている⁴⁾。1つは、Couple Stressの概念であり、Fig. 1に示すように古典流体の力学では流体内の面要素 ΔS の力学的作用が表面力 ΔF のみに対して、モーメント ΔM も作用することによってある点の応力状態は応力 $\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} (\Delta F / \Delta S)$ とCouple Stress $\underline{m} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} (\Delta M / \Delta S)$ によって定義される。もう1つの概念は内部回転の概念で、流体粒子が速度に関する3つの自由度を持つと共に粒子自身も自分の持っている固有の軸を中心として回転し角運動量を引き起こす。その例として、Fig. 2のようなDumbbell型の粒子を考えてみる。 $\underline{x}$ は粒子の重心の位置vector、 $\underline{n}$ は粒子の方向を示すvectorとすると角運動量は $\underline{h} = \underline{x} \times \underline{x} + \underline{n} \times \underline{n}$ となり、 $\underline{n} \times \underline{n}$ が内部回転による角運動量を示す。

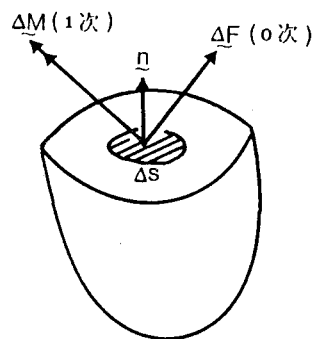


Fig. 1 Couple Stressの概念図

両方の概念を同時に考慮した理論がEringenによるMicropolar理論である⁵⁾。また、Green⁶⁾からはこの微視構造を有する流体に対して別の理論(Direct理論)を展開している。この理論は変形可能なDirectorと呼ばれる幾何学量(例えば、変位、角度など)と力学量(応力、Couple stressなど)をもつ物質曲面を導入しているものを基本として構築された理論である。

3. 適用例と考察

上記の理論を周期的な圧力こう配の作用する平行平板間の振動的な非定常流れの簡単な問題に適用する。内部回転による運動量を考慮しないでCouple stressだけを考慮して運動方程式をたてると、 u を流速、 p を圧力、 ω を角振動数、 ρ を密度として次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t = & -1/\rho \cdot \partial p / \partial x + \mu/\rho \cdot \partial^2 u / \partial y^2 \\ & - \eta/\rho \cdot \partial^4 u / \partial y^4, \quad \partial p / \partial x = -P \cos \omega t \end{aligned} \quad (1)$$

この方程式から右辺第2項までがNavier-Stokesの方程式(古典理論)、右辺第3項がCouple stressの効果を示している。そのことは構成方程式としてCouple stressを $\underline{m} = -2\eta \partial^2 u / \partial y^2$ で表しており、 η を物質定数で運動量の次元をもつことから推論することができる。粘性係数 μ との比をとった η/μ は長さの2乗の次元をもち、ここでは $l = (\eta/\mu)^{0.5}$ とする。境界条件は、境界で速度が0である条件とCouple stressが0である条件とし、初期条件と合わせて次のように書くことができる。

$$\text{I.C.: } t \leq 0 \quad 0 < y < h \text{ で } u(y, t) = 0 \quad \text{B.C.: } t > 0 \text{ で } u(0, t) = 0, u(h, t) = 0, \underline{m}(0, t) = 0, \underline{m}(h, t) = 0 \quad (2)$$

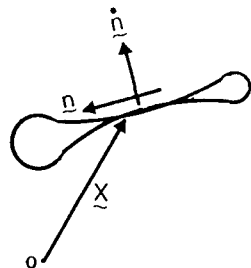


Fig. 2 内部回転に対する概念図 (Dumbbell型の粒子)

これより、運動方程式を初期条件、境界条件のもとで解くと、次式ようになる。

$$U(\xi, \tau) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{4\delta / \{(n\pi) \cdot (\lambda n^2 + \delta^2)\}}{\lambda n \exp(-\lambda n \tau) \sin n\pi \xi} \cdot \{\lambda n \cos \delta \tau + \delta \sin \delta \tau\} \quad (3)$$

ただし、 $\lambda n = (n\pi)^4 / a^2 + (n\pi)^2$, $U = \omega \rho u / P$, $\xi = y/h$, $\tau = \mu t / \rho h^2$, $\delta = \omega h^2 \rho / \mu$, $a = h/\ell$

Fig.3は式(3)の無次元化された流速分布を $\delta = 5$ として $a = 1, 2, 5, 10$ の場合について図化したものである。 a の値はCouple stressの効果を示し、 $a \rightarrow \infty$ で従来の古典解に一致する。この結果、Couple stressを考慮すると従来の理論では見られなかった寸法効果が現れ流速を無次元で表しても寸法による流速分布の違いが現れることになる。

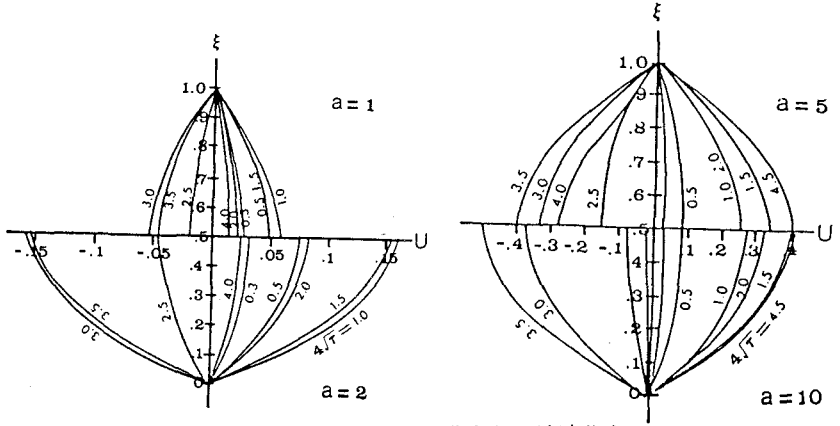


Fig.3 式(3)の無次元化された流速分布

よる流速分布の違いが現れることになる。Fig.4は、流量、水路中央でのCouple stress、壁面でのせん断応力の時間的変化を示した図である。この図から a の値が25でCouple stressの効果は無視することができ、従来の古典解と一致するが、 a が小さいほどCouple stressの効果によって流速が小さくなって流量が減少し、見掛けの粘性係数の増大を示す。また、せん断応力も a が大きいくほど大きく、運動の初期においてはその差は激しいが定常状態に近づくにつれてほぼ変わらなくなることを読みとることができる。

4. おわりに

微視構造を有する流体に対する力学概念について簡単に紹介し、その理論を既に厳密解の得られている振動流問題に適用して比較し、Couple stressの効果によって上述のような特異な流れの挙動することを示した。現在、同じ問題、さらにその他の種々な問題に対してGreenらによるDirect理論を適用し、検討しているところである。

Ref 1) A.C.Eringen; Theory of the microfluids, J.Math. anal. Appl, 39, 253-266, 1972 2) A.C.Eringen; Bull. Math. Biology, 38, 135, 1976 3) A.C.Eringen; Liquid Crystal and Ordered Fluids, 3, 433, 1978 4) V.K.Stokes; Theories of Fluids with Microstructure, Springer-Verlag, pp17-33, 1984 5) A. C.Eringen; Theory of Micropolar Fluids, J.Math. Mech, 16, 1-18, 1966 6) A.E.Green and P.M.Naghdi; Directed fluid sheets, Proc. R. Soc. Lond. A, 347, pp447-473, 1976 7) A.E.Green and P.M.Naghdi; A direct theory of fluid flow in channels, Arch. Rat. Mech. Anal, 86, pp39-63, 1984

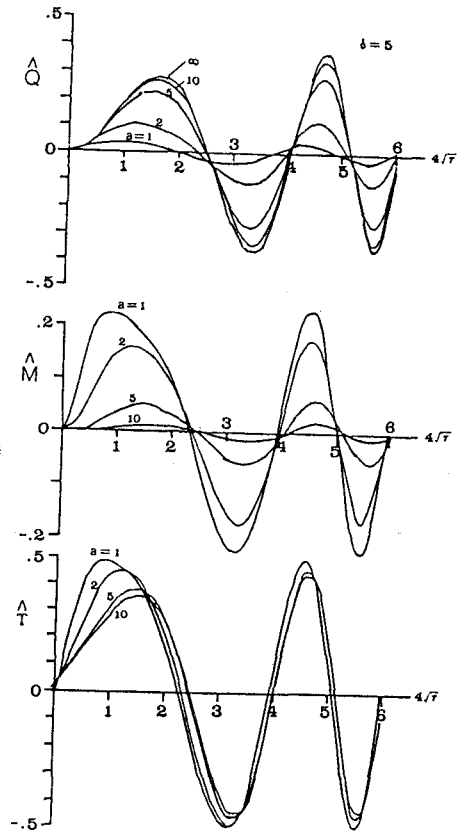


Fig.4 流量、水路中央でのCouple stress および壁面せん断応力の時間的変化