

中央大学 学生員 白井 信
中央大学 正員 川原 盛人
中央大学 正員 中山 司

1. はじめに

有限要素法を用いて非圧縮粘性流れを解析する場合、一般に流速に対する形状関数は圧力に対する形状関数よりも一次高いものでなければならず、もし同じ次数の形状関数を用いると、いわゆるcheckerboard状の圧力振動が発生することが知られている。しかし、これはNavier-Stokes方程式と連続の方程式と同時に解く場合であり、fractional-step法と呼ばれる分段階法についてはいまだ定説が定まらないのが現状である。

そこで本論文では、流速と圧力に対し一次の形状関数を用いることとし、fractional-step法の一つである流速修正法について圧力振動を調べてみた。解析のアルゴリズムと境界条件の与え方も変えることによって七種類の解法を考え、それらと比較検討した結果を報告する。

2. 基礎方程式と解法

図-1に示す二次元の急拡大水路内の流れを考える。このときの、流体運動の支配方程式は次式で与えられる。

表-1 流速修正法のアプローチと境界条件

	方法 ①	方法 ②	方法 ③	方法 ④	方法 ⑤	方法 ⑥	方法 ⑦
	圧力補正項による流速修正法				圧力による流速修正法		
	圧力を圧力補正項より求める方法				圧力をポアソン方程式より求める方法		
アルゴリズム	① 次式より $\tilde{u}_i$ を求める。 $\tilde{u}_i = u_i^n - \Delta t (u_j^n u_{i,j} + \frac{1}{\rho} p_{,i} - \nu (u_{i,j,j}^n + u_{j,i,i}^n))$ (1) ② 次式より ϕ を求める。 $\phi_{,ii} = -\tilde{u}_{i,i}$ (2) ③ 次式より u_i^{n+1} を求める。 $u_i^{n+1} = \tilde{u}_i + \phi_{,i}$ (3) ④ 次式より p^{n+1} を求める。 $p^{n+1} = p^n - \frac{\rho}{\Delta t} \phi$ (4a) $p_{,xx} + p_{,yy} = 2\rho (u_{,x}^{n+1} u_{,y}^{n+1} - \nu u_{,x}^{n+1} u_{,y}^{n+1})$ (4b) ⑤ u_i^{n+1}, p^{n+1} を u_i^n, p^n として①へ。				① 次式より $\tilde{u}_i$ を求める。 $\tilde{u}_i = u_i^n - \Delta t (u_j^n u_{i,j} - \nu (u_{i,j,j}^n + u_{j,i,i}^n))$ (5) ② 次式より p^{n+1} を求める。 $p_{,ii} = \frac{\rho}{\Delta t} \tilde{u}_{i,i}$ (6) ③ 次式より u_i^{n+1} を求める。 $u_i^{n+1} = \tilde{u}_i - \frac{\Delta t}{\rho} p_{,i}^{n+1}$ (7) ④ u_i^{n+1} を u_i^n として①へ。		
境界条件	(1) 式での境界条件 $u_i = \hat{u}_i$ on S_1 $p = 0$ on S_3 $u_i = 0$ on S_2 (2) 式での境界条件 $u_i = \hat{u}_i$ on S_1 $\phi = 0$ on S_3 $u_i = 0$ on S_2 $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ on S_1, S_2 (3) 式での境界条件 $u_i = \hat{u}_i$ on S_1 $u_i = 0$ on S_2 (4) 式での境界条件 $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ on S_1, S_2 $\phi = 0$ on S_3 $u_i = \hat{u}_i$ on S_1 $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ $u_i = 0$ on S_2 $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ $p = 0$ on S_3				(5) 式での境界条件 $u_i = \hat{u}_i$ on S_1 $u_i = 0$ on S_1 (6) 式での境界条件 $u_i = \hat{u}_i$ on S_1 $\frac{\partial p}{\partial n} = \nu \frac{\partial^2 V_n}{\partial n^2}$ $\frac{\partial p}{\partial n} = \nu \frac{\partial^2 V_n}{\partial n^2} + (\tilde{u} - \hat{u})_{,i} \cdot (\tilde{u} - \hat{u})_{,i}$ $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ on S_1 $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ on S_2 $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ on S_2 $u_i = 0$ on S_2 $p = 0$ on S_3 $p = 0$ on S_3 $p = 0$ on S_3 (7) 式での境界条件 $u_i = \hat{u}_i$ on S_1 $u_i = 0$ on S_2		
流場について	圧力を未知数として解く				圧力を未知数として解く		
	$V_n = u \cdot l + v \cdot m$				$V_n = \tilde{u} \cdot l + \tilde{v} \cdot m$		

$$\dot{U}_i + U_j U_{i,j} + \frac{1}{\rho} P_{,i} - \nu (U_{i,j} + U_{j,i})_{,j} = 0 \quad (1)$$

$$U_{i,i} = 0 \quad (2)$$

ここに、 U_i は x_i 軸方向の流速成分、 P は圧力を表わし、 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ 、 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ を意味する。 ρ は密度、 ν は動粘性係数を表わす。

式(1)、(2)を解くために表-1に示すような三種類のアルゴリズムも考える。さらにそれぞれについて圧力の境界条件の与え方を変えることにより方法④から方法⑦の七種類を組み立て、考察の対象とする。

それぞれの方法では、Galerkin法を用いる通常の有限要素法により各方程式を離散化する。

3. 解析結果

図-2～図-8に、方法④～⑦によってそれぞれ計算された500step後の等圧線分布を示す。方法②～⑦による計算結果は収束値であるが、方法④による結果は収束せず、振動が生じている。また数値的に見れば、方法②、⑤、⑥、⑦の結果がよい。圧力をポアソン方程式を解いて求める方法③、④では、等圧線の分布形が他と異なり、境界条件についてさらに検討が必要であると思われる。

各方法についての結果をまとめると、流入境界についての境界条件の物理的意味の明確さ、扱いやすさという点で方法⑦がもっともすぐれていると考えられる。

4. おわりに

流速修正法に属する七つの方法について検討を行った。今後は、方法⑦を実際の流れ現象の解析へ応用することを検討していきたい。

参考文献

M. Kawahara and K. Ohmiya, "Finite Element Analysis of Density Flow Using the Velocity Correction Method," Int. J. Num. Meth. Fluids, 5, PP. 981 - 993, 1985.

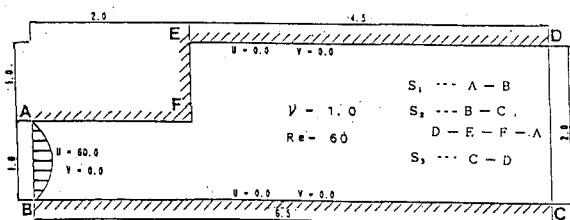


図-1 解析領域図

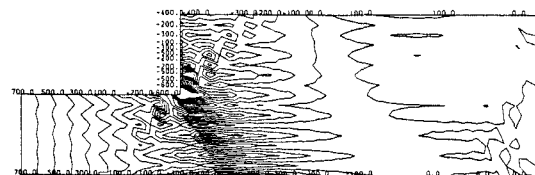


図-2 方法④による解析結果

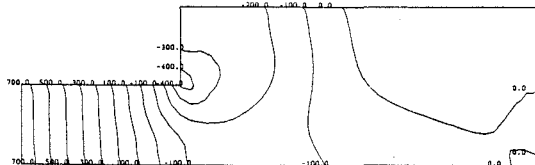


図-3 方法⑤による解析結果

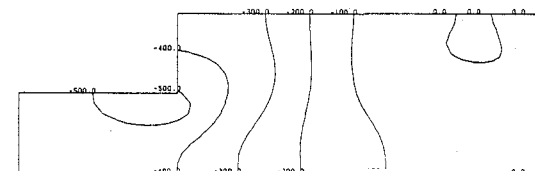


図-4 方法⑥による解析結果

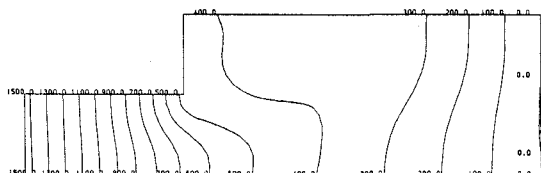


図-5 方法⑦による解析結果

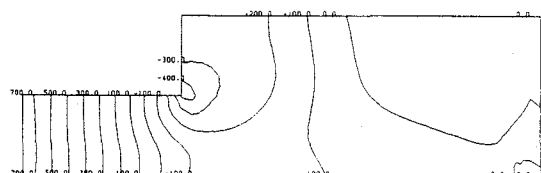


図-6 方法②による解析結果

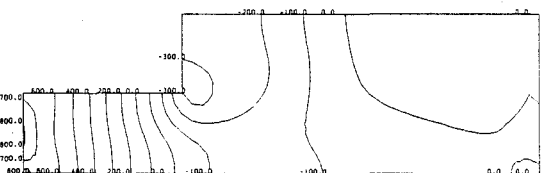


図-7 方法③による解析結果

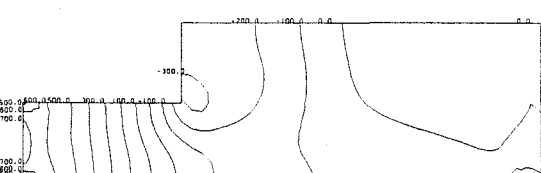


図-8 方法⑦による解析結果