# (Ⅱ－3)　Sextile法と PWM法による三母数対数正規分布の母数推定

山梨大学工学部　正　員　竹内邦良
山梨大学大学院　学生員　土屋一仁
甲府日本電気　　　　　　伊達結城

## ①はじめに

三母数対数正規(LN3) 分布((★)式で示す) の母数推定法には，積率法，最尤法，及び Quantile法 (積率法との併用) 等がある。一般に積率法は，高次の積率を用いる場合，推定される母数が，異常値の影響を大きく受ける恐れがある。Jenkinson (1969)の Sextile法[3] ,Greenwood(1979)の Probability Weighted Moment(PWM) 法[1] は，積率法と比較して異常値の影響を抑えることができるという点で共通した性質を持っている。本報では，Sextile 法と PWM法の，LN3分布への適用手順と適用例（数値実験結果）を紹介する。尚，現段階では， PWM法の適用範囲は二母数対数正規(LN2) 分布までなので，まず Quantile 法で位置母数を推定し残る母数を PWM法で推定した。

## ②基礎概念

### Sextile法

Sextile法は，(1)式に示すような区間境界値 $x_i$ (Fは分布関数) に対し，(2)式の $w_i$ (Sextile Mean)を算出する。これにより (3-a,b,c)式で表わされる平均値，標準偏差，比の 3つを計算し，これらから母数を推定していく手法である。具体的に LN3分布に対しては (4)式の変数変換によって，z の Sextile Mean 及び (3)式同様の統計量が (5)式，(6-a,b,c)式で示す通りになる(Φは標準正規分布関数) 。(4)式の線形関係は， Sextile Mean に対して拡張可能で，LN3 分布の平均値，標準偏差，比は，母数と zのそれらを用いて (8-a,b,c)式で表わすことができる。実測資料に適用するには，資料を順序統計量に直した後，標本数を等しく 6つのグループに分け，各グループの Sextile Mean を計算し，それらの平均値，標準偏差，比を算出する。母数は (9-a,b,c)式より推定できる。$\sigma(a)$ ，$\ell(a)$には近似多項式を作成して計算を行なうと，母数推定が容易となる。

### PWM法

PWM Mr を(10)式で定義する（ Eは期待値演算子， rは実数）。実測資料があるとき PWMを(11)式で算出し( $x_i$は順序統計量， rは 0 or 自然数)，(12)式の方程式を解き母数推定値とする。以上の手法が PWM法である。先にふれたように，現段階で LN2分布の PWM公式は誘導済みであるため Quantile 法との併用で LN3分布の母数を推定する手法を紹介する。これには 2通りあり，まず一番目は Quantile 法で母数 cを推定後，(13-a)式で示した対数変換値 $z_i$ に対しての PWMを(11)式に従い算出し，母数を(13-b,c)式で推定する（πは円周率）。二番目は同様に c推定後，(14-a)式で示す $z_i$ の PWMを算出し，(14-b,c)式で母数を推定する($\Phi^{-1}$ は逆（標準）正規分布関数)。尚，紙面に限りがあるので公式の誘導手順は省略する。

## ③実験内容と結果

以上をもとに既往推定法と 3つの新しい推定法の比較のため数値実験を行なった。実験内容を簡潔に述べると， LN2分布に従う乱数を発生させ，非超過確率 pを持つ確率変量推定値の root mean square error ((15)式で定義される) を計算し，この大小により母数推定法を比較した。期待値演算のための計算回数は5000回とした。採用した既往推定法は， Mom ;標本歪度を$\sqrt{n(n-1)}/(n-2)$で補正する積率法， Qt+Mom(LS) ;Quantile 法と対数変換値の積率を併用する方法， Qt+Mom(RS) ;Quantile 法と通常の積率を併用する方法，の 3手法である。 Qt+PWM(LS)は(13-a,b,c)式， Qt+PWM(RS) は(14-a,b,c)式，Sxt(Sextile)は(9-a,b,c) 式で各々示した通りである（今回採用した Quantile 法は Stedinger (1980) の方法[2]）。実験結果の一例を

Table 1 に示す。これは乱数の母集団が，変動係数 0.818，歪度 3.000 を取るように指定した場合である。表中の各値は(15)式の rmse を非超過確率 pの確率変量真値で除してある。表中 Sextile法は 2つの結果を示してある。これは，$\sigma(a)$，$\ell(a)$の近似多項式を著者らが 2種類作成し（母数a の誤差を 1% 未満となるようにした）多項式の違いが rmse にどの程度影響するかをみるために掲載した。極端な差異はないが，精度の必要に応じて（9-a,b)式の計算に Monte Carlo法のような手法の導入も必要である。新しい 3つの推定法は，既往のそれと比較して同等かそれより良くない状況を示している点が目立つようではあるが，母歪度や標本数等を変化させた時の結果は，この限りではないものと推測している。

3 Parameter Log Normal Distribution

$$F(x) = \Phi\left(\frac{\ell n(x-c)-m}{a}\right) \quad \cdots\cdots(\star)$$

$\Phi$; Standard Normal Distribution

Table 1 Root Mean Square Error of Quantile Estimates

| Method | Sample Size | $rmse(\hat{x}_p)/x_p$ 0.01 | 0.10 | 0.90 | 0.99 | 0.998 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Mom | | 2.280 | 0.576 | 0.301 | 0.401 | 0.465 |
| Qt+Mom(LS) | | 0.877 | 0.288 | 0.279 | 0.621 | 0.970 |
| Qt+Mom(RS) | | 0.926 | 0.334 | 0.247 | 0.397 | 0.518 |
| Qt+PWM(LS) | 15 | 0.924 | 0.285 | 0.295 | 0.686 | 1.094 |
| Qt+PWM(RS) | | 0.937 | 0.228 | 0.252 | 0.518 | 0.793 |
| Sxt | | 1.007 | 0.316 | 0.248 | 0.626 | 1.047 |
| ( Sxt | | 0.999 | 0.315 | 0.248 | 0.626 | 1.048 ) |
| Mom | | 1.743 | 0.433 | 0.217 | 0.327 | 0.400 |
| Qt+Mom(LS) | | 0.526 | 0.187 | 0.189 | 0.361 | 0.500 |
| Qt+Mom(RS) | | 0.554 | 0.222 | 0.179 | 0.313 | 0.418 |
| Qt+PWM(LS) | 30 | 0.548 | 0.186 | 0.193 | 0.373 | 0.520 |
| Qt+PWM(RS) | | 0.555 | 0.188 | 0.182 | 0.347 | 0.486 |
| Sxt | | 0.676 | 0.219 | 0.182 | 0.334 | 0.458 |
| ( Sxt | | 0.675 | 0.226 | 0.183 | 0.338 | 0.463 ) |
| Mom | | 1.438 | 0.355 | 0.172 | 0.278 | 0.351 |
| Qt+Mom(LS) | | 0.378 | 0.141 | 0.148 | 0.272 | 0.364 |
| Qt+Mom(RS) | | 0.398 | 0.170 | 0.145 | 0.262 | 0.353 |
| Qt+PWM(LS) | 50 | 0.391 | 0.141 | 0.150 | 0.274 | 0.367 |
| Qt+PWM(RS) | | 0.397 | 0.144 | 0.145 | 0.266 | 0.358 |
| Sxt | | 0.508 | 0.170 | 0.147 | 0.289 | 0.403 |
| ( Sxt | | 0.498 | 0.172 | 0.148 | 0.293 | 0.407 ) |

LS :Log Space
RS :Real Space

$$rmse(\hat{x}_p) = \sqrt{E((x_p-\hat{x}_p)^2)} \quad \cdots\cdots(15)$$

Sextile method

$$F(x_i) = i/6 \quad \cdots\cdots(1)$$

$$w_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} 6xf(x)dx \quad \cdots\cdots(2)$$

$$\mu_w = \Sigma w_i/6 \quad \cdots(3\text{-a})$$

$$\sigma_w = \sqrt{\Sigma(w_i-\mu_w)^2/6} \quad \cdots(3\text{-b})$$

$$\ell_w = (w_2-w_1)/(w_6-w_5) \quad \cdots(3\text{-c})$$

$$x = \exp(m)z+c \quad \cdots\cdots(4)$$

$$\nu_i = 6\exp\left(\frac{a^2}{2}\right)\left(\Phi(t_i-a)-\Phi(t_{i-1}-a)\right) \quad \cdots\cdots(5)$$

$$(\Phi(t_i) = i/6)$$

$$\mu_\nu = \exp\left(\frac{a^2}{2}\right) \quad \cdots(6\text{-a})$$

$$\sigma_\nu = \sigma(a) \quad \cdots(6\text{-b})$$

$$\ell_\nu = \ell(a) \quad \cdots(6\text{-c})$$

$$\omega_i = \exp(m)\nu_i+c \quad \cdots\cdots(7)$$

$$\mu_\omega = \exp\left(m+\frac{a^2}{2}\right)+c \quad \cdots(8\text{-a})$$

$$\sigma_\omega = \exp(m)\sigma_\nu \quad \cdots(8\text{-b})$$

$$\ell_\omega = \ell_\nu \quad \cdots(8\text{-c})$$

$$\hat{\ell}_\omega = \ell(\hat{a}) \quad \cdots(9\text{-a})$$

$$\hat{b} = \ell n(\hat{\sigma}_\omega/\sigma(\hat{a})) \quad \cdots(9\text{-b})$$

$$\hat{c} = \hat{\mu}_\omega-\exp\left(\hat{m}+\frac{\hat{a}^2}{2}\right) \quad \cdots(9\text{-c})$$

$$(i = 1,2,\cdots,6)$$

PWM method

$$M_r = E(XF^r) = \int_0^1 x(F)F^r dF \quad \cdots\cdots(10)$$

$$\hat{M}_r = \frac{1}{n}\Sigma x_i\frac{(i-1)(i-2)\cdots(i-r)}{(n-1)(n-2)\cdots(n-r)} \quad \cdots\cdots(11)$$

$$M_r = \hat{M}_r \quad \cdots\cdots(12)$$

$$z_i = \ell n(x_i-\hat{c}) \quad \cdots(13\text{-a})$$

$$\hat{m} = \hat{M}_0 \quad \cdots(13\text{-b})$$

$$\hat{a} = \sqrt{\pi}(2\hat{M}_1-\hat{M}_0) \quad \cdots(13\text{-c})$$

$$z_i = x_i-\hat{c} \quad \cdots(14\text{-a})$$

$$\hat{m} = \ell n(\hat{M}_0)-\frac{\hat{a}^2}{2} \quad \cdots(14\text{-b})$$

$$\hat{a} = \sqrt{2}\,\Phi^{-1}(\hat{M}_1/\hat{M}_0) \quad \cdots(14\text{-c})$$

＊参考文献


1) Greenwood,Landwehr,Matalas & Wallis (1979): W.R.R., Vol.15(5),pp.1049-1054
2) Hoshi,Stedinger & Burges (1984): J.Hydrol., Vol.71, pp.1-30
3) Natural Environment Research Council, London (1975): Flood Studies Report, Vol.1, pp.68-69,90-92
4)竹内，土屋 (1987):第31回水理講演会論文集，pp.191-196