

(I - 4) 弾性多層構造体の逆問題解析の検討

東京電機大 理工学部 正員○松 井 邦 人
東京電機大 理工学部 渡 辺 正 幸

1 はじめに

多層構造体は線形弾性挙動をするものと仮定し、その表面変位から内部の各層の弾性係数を推定する方法について検討した。この様な問題は、滑走路や道路のような構造物で、内部の平均的な損傷程度を推定するのに有効である。2層構造については、表面変位から各層の弾性係数を求める方法が存在しているので、ここでは、3層以上の構造を対象とし、逆解析法のアルゴリズムに関する検討、測定変位のバラツキが弾性係数の推定値に及ぼす影響を検討している。

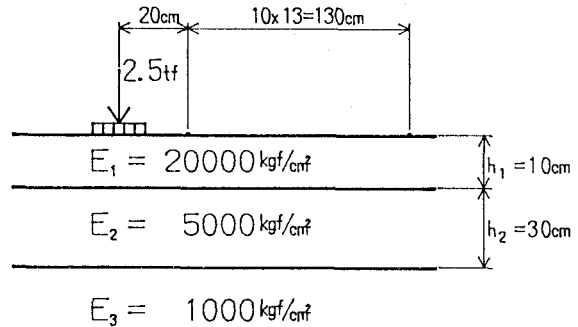


図1 弾性多層構造体のモデル

2 逆問題解析法

図1のように弾性係数の異なる平行な層からなる構造体の表面に外力2.5tf (半径10.5cmの円形に分布)を作用させ、数個の測定点で変位を測るものとする。その値を基に、次のような方法で逆解析を行い、各層の弾性係数の推定を行った。

1) 最適化手法の利用

表面で推定された変位を δ_i ($i=1 \sim n$)とする。 M は測定点の個数である。また各層の弾性係数 E_j の推定値を利用して、上記測定点で計算した変位を Z_i とすると、この逆解析問題は次のような最適化問題となる

$$\text{Find } E_j; \text{ such that } \min \sum_{i=1}^M (Z_i - \delta_i)^2 \quad \text{--- ①}$$

この問題は2次形式をしており、このような問題に適するアルゴリズム、共役勾配法とFletcherPowell法を使用した。

2) Taylor展開の利用

各層の弾性係数を推定して変位を求めると、当然計算値は推定値と異なるであろう。順次 E_j の推定値を改善し、最適な E_j 分布を求める必要がある。 $Z_i(E_j + \delta E_j)$ をTaylor展開すると

$$Z_i(E_j + \delta E_j) \doteq Z_i(E_j) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial Z_i}{\partial E_j} \delta E_j \quad (i=1 \sim M) \quad \text{--- ②}$$

$Z_i(E_j + \delta E_j) = \delta_i$ と置くと

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial Z_i}{\partial E_j} \delta E_j = -Z_i + \delta_i \quad (i=1 \sim M) \quad \text{--- ③}$$

層数 N と測定点の個数 M が等しいとき、式③の連立方程式は δE_j について容易に解くことができる。 $E_j + \delta E_j$ が改善された E_j の値である。測定値と計算値の一致度が良くなるまで計算を繰り返す。この

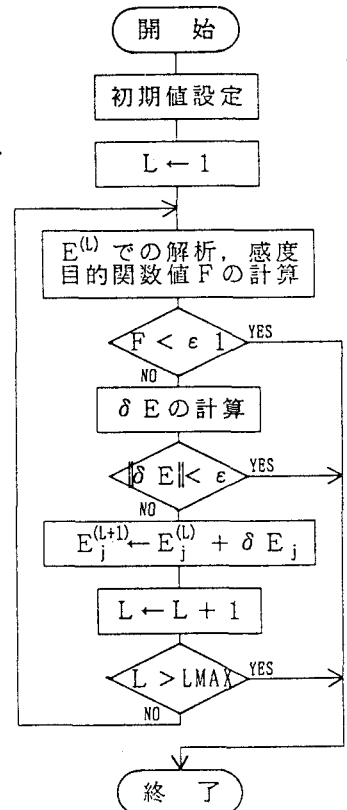


図2 逆解析の流れ図

ようにして求められた δE_j が大きすぎると収束性が悪くなると考えられるので、ここでは $|\delta E_j| > E_j/2$ のとき、 $\delta E_j = \text{sgn}(\delta E_j) E_j/2$ としている。この方法は一種のNewtonRaphson法であり、また最適性基準法とも見なすことが出来る。

3) 最小2乗法の利用

式③において $M > N$ のとき、式の数未知数 δE_j の数より多くなる。式③を変換して

$$f = \sum_{i=1}^M \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial Z_i}{\partial E_j} \delta E_j + Z_i - \delta_i \right) \omega_i \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial Z_i}{\partial E_j} \delta E_j + Z_i - \delta_i \right) \quad \text{--- ④}$$

と置く、 ω_i は重み係数である。式④を最小とするには次の条件を満足すれば良い

$$\sum_{i=1}^M \omega_i \frac{\partial Z_i}{\partial E_j} \frac{\partial Z_i}{\partial E_j} \delta E_j = - \sum_{i=1}^M \frac{\partial Z_i}{\partial E_j} (Z_i - \delta_i) \omega_i \quad (j=1 \sim N) \quad \text{⑤}$$

式⑤は式の数と未知数が一致し δE_j について解くことができる。この計算では $\omega_i = 1$ としているが、測定値の精度も考慮し適切な ω_i の選択が望ましい。

3 計算結果と考察

最適化手法の利用 — 変位が小さく弾性係数が大きい場合、式①の感度 $\frac{\partial Z_i}{\partial E_j}$ が非常に小さくなる。特に最下層の E_1 だけが改善され、上層の E_j がほとんど改善されない傾向を示している。

Taylor展開の利用 — 3層構造($N=3$)の場合について検討した。弾性係数は $E_1=20000\text{kgf/cm}^2$ 、 $E_2=5000\text{kgf/cm}^2$ 、 $E_3=1000\text{kgf/cm}^2$ として解析し着目点での変位を求め、測定値と見なしている。初期推定値として $E_1=30000\text{kgf/cm}^2$ 、 $E_2=6000\text{kgf/cm}^2$ 、 $E_3=2000\text{kgf/cm}^2$ を用いた。着目

点は、荷重の作用点から20cm~150cmの間を10cm刻みとした14点から任意の3点を選んだ。着目点の組合せ364ケースについて逆解析を行った結果、238ケース(65.4%)が $\pm 10\%$ 以下の精度で正しい値に収束した。その他次のようなことが観察された。i) 最下層の E_1 が常に精度良く正しい値に収束している。ii) 着目点が収束におおきく影響する。iii) E_j の上限値が既知のときその条件を加えることにより収束性は向上する。

最小2乗法の利用 — 上記と同じ問題について任意の測定点を4点選んで逆解析を行った。解析は全部で1001ケースあり、775ケース(77.4%)が目標値の $\pm 10\%$ の範囲内に収束した。測定点の個数を増加すると、正しい値に収束する確率が高くなることが分かる。

4 測定値の誤差が E_j の推定値に及ぼす影響

逆解析手法を用いて得られた結果には、数値解析上の誤差が存在する。従ってここでは E_j のばらつきが変位にどのように影響するか、モンテカル口法を用いて計算した。 E_1 、 E_2 、 E_3 の平均値には上記の値を用い、それ等の標準偏差をそれぞれ $\sigma_1=2000\text{kgf/cm}^2$ 、 $\sigma_2=500\text{kgf/cm}^2$ 、 $\sigma_3=100\text{kgf/cm}^2$ としている。結果は表1に示す通りである。

5 まとめ

弾性多層構造体の逆解析に、本研究で示した方法が適用できそうである。最適な変位の測定位置、測定点の個数、測定値の精度等に関する検討が必要である。

表1 ばらつきを考慮した E_j と δ_j の関係

距離 (cm)	平均 (cm)	標準偏差 (cm)	変動係数 (%)	最大 (cm)	最小 (cm)
20	1.9062E-02	1.3600E-03	7.1347E-02	2.5166E-02	1.5844E-02
30	1.5970E-02	1.2238E-03	7.6635E-02	2.1806E-02	1.3084E-02
40	1.3845E-02	1.1362E-03	8.2065E-02	1.9394E-02	1.1140E-02
50	1.2227E-02	1.0613E-03	8.6802E-02	1.7469E-02	9.6705E-03
60	1.0908E-02	9.9137E-04	9.0885E-02	1.5835E-02	8.5131E-03
70	9.7950E-03	9.2466E-04	9.4401E-02	1.4409E-02	7.5629E-03
80	8.8416E-03	8.6209E-04	9.7504E-02	1.3151E-02	6.7680E-03
90	8.0184E-03	8.0344E-04	1.0020E-01	1.2037E-02	6.0957E-03
100	7.3048E-03	7.4689E-04	1.0225E-01	1.1049E-02	5.5235E-03
110	6.6838E-03	6.9349E-04	1.0376E-01	1.0172E-02	5.0336E-03
120	6.1416E-03	6.4446E-04	1.0493E-01	9.3911E-03	4.6120E-03
130	5.6670E-03	5.9925E-04	1.0574E-01	8.6962E-03	4.2475E-03
140	5.2499E-03	5.5798E-04	1.0628E-01	8.0768E-03	3.9306E-03
150	4.8826E-03	5.2031E-04	1.0657E-01	7.5239E-03	3.6539E-03