

(1-3) シンプлекс・タブローを用いた最適解の探索

群馬大学 正員 平田恭久
東京都立大学 正員 伊藤文人

1. まえがき

筆者らは等式制約法と称する探索法について検討を行ってきたが、等式制約法では Simplex tableau を用いて活性な制約面を求めている。Simplex tableau は線形計画法(LP)で用いられるものであるが、非線形最適化手法の中で逐次線形計画法(SLP)は、目的関数、制約条件を線形近似し、LPを反復使用することにより最適解を探索している。等式制約法の活性な制約面を求める方法を発展させ、Simplex tableau の反復使用により非線形最適化問題の最適解を探索する方法を示し、この方法の特色をSLPと比較してみる。

2. 掃出し計算

双対法ではLagrange乗数 λ による探索で $g_m=0$ となる制約式($g \leq 0$ 及び $\lambda \geq 0$ を満足)を選択している。Lagrange関数 $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x)$ が x で微分可能なら双対法は(1)式で示される。(1)式で x を固定すれば双対法は λ について線形である。 x による探索がないと、(1)式第2行はすべての x_i について必ず成立するとは限らないので、左半分のみを用いて(2)式とする。これは線形計画法問題とみなせるので、Simplex法に準じた掃出し計算を行う。 $\frac{\partial L}{\partial x}$ は slack 変数に相当するが、 $\frac{\partial L}{\partial x}$ には非負条件はなく、掃出しでの軸要素の選択はSimplex法とは若干異なる。

3. Δx_m 掃出し, Δx_e 掃出し

制約条件に抵触していると $-g_i < 0$ であり、これを $-g_i = 0$ となるように掃出す。これが掃出し列の選択であり、掃出し行の選択は(5)式で行う。掃出し計算により m 個の制約式 g_m と制約変数 x_m が選択できたので、残りの変数を探索変数 x_e とする。 Δx_m 掃出しが終了した段階を図-1の第2表に示すが、① $-g_i < 0$ の制約式は存在しない(活性な制約面) ②掃出し行となった x_m 行 f 列は $\lambda_m \geq 0$ である(有利な制約面) ③掃出し行でない x_e 行 f 列は $\frac{\partial L}{\partial x_e}$ になる(探索方向を示す) ④ g 行 Δx_m 列は Δx_m になる($g_m=0$ に近づくための Δx_m)の結果が得られている。作成した探索プログラムでは、現在の g_m, x_m をなるべく保持するために、現在の g_m, x_m で掃出しを行った後に上記の $-g_i < 0$ を掃出す。

上記の Δx_m 掃出しにより(3)式の成立に近づくことができるが、(4)式を成立させるには $\frac{\partial L}{\partial x_e} = 0$ とするような探索が必要である。探索方向ベクトル Δx_e が得られているとすると、 Δx_e を図-1の第2表の x_e 行に乗じて g 行に加えると第3表になる。この操作を Δx_e 掃出しと称しているが、 Δx_e 掃出しにより x_e の変化に対して $g_m=0$ に沿うような x_m の変化が生じる。第3表の g 行 Δx_m 列及び Δx_e 列は、 Δx_e 掃出しに伴う制約変数及び探索変数の変化である。

$$\left. \begin{aligned} \max_x \{ & f(x) + \lambda^T g(x) \} \\ \text{subj. to } & \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda^T \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{---(1)}$$

$$\left. \begin{aligned} \max_{\lambda} \lambda^T g + f \\ \text{subj. to } & -\lambda^T \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{---(2)}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_m} = \frac{\partial f}{\partial x_m} + \lambda^T \frac{\partial g}{\partial x_m} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x) &\leq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} \lambda = \lambda^T g(x) &= 0, \lambda \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{---(3)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda^T \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0 \quad \text{---(4)}$$

$$\lambda_i = \min \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} / \left(-\frac{\partial g_i}{\partial x_i} \right) \geq 0 \right\} \quad \text{---(5)}$$

$$\Delta x_{ij} = -\frac{\partial L}{\partial x_{ij}} / \left| \frac{\partial f}{\partial x_{ij}} \right| x_{ij} \cdot \beta_j \quad \text{---(6)}$$

図-1 掃出しに伴う tableau 内容

第1表

	f列	g_m 列	g_{r-m} 列	Δx_m 列	Δx_e 列
g 行	f	$-g_m^T$	$-g_{r-m}^T$	0_m^T	0_e^T
x_m 行	$\frac{\partial f}{\partial x_m}$	$-\frac{\partial g_m}{\partial x_m}$	$-\frac{\partial g_{r-m}}{\partial x_m}$	I_m	0
x_e 行	$\frac{\partial f}{\partial x_e}$	$-\frac{\partial g_m}{\partial x_e}$	$-\frac{\partial g_{r-m}}{\partial x_e}$	0^T	I_e

第2表

↓ Δx_m 掃出し

$f + \Delta f_m$	0_m^T	①	Δx_m^T	0_e^T
λ_m	I_m	②	$\left(\frac{\partial g_m}{\partial x_m} \right)^T$	0
$\frac{\partial L}{\partial x_e}$	0^T	③	④	I_e

第3表

↓ Δx_e 掃出し

$f + \Delta f_m$ Δf_e	0_m^T	⑤	⑥	Δx_e^T
λ_m	I_m	②	$\left(\frac{\partial g_m}{\partial x_m} \right)^T$	0
$\frac{\partial L}{\partial x_e}$	0^T	③	④	I_e

$$\textcircled{1} = -g_{r-m}^T - \Delta x_m^T \frac{\partial g_{r-m}}{\partial x_m}$$

$$\textcircled{2} = -\left(\frac{\partial g_m}{\partial x_m} \right)^T \frac{\partial g_{r-m}}{\partial x_m}$$

4. 探索法の概念

Δx_m 掃出し, Δx_e 掃出しを用いた探索法の概要を図-2に示す。現在の x は点①である。 Δx_m 掃出しにより Δx_m が生じ、点②になる。探索変数の変化が Δx_e であり、点③になる。 Δx_m 掃出しを行った tableau で引続いて Δx_e 掃出しを行うと、制約変数の変化は図-1の⑥式であり、点④になる。掃出しによる x の変化 Δx は tableau の y 行 Δx_m 列及び Δx_e 列に生じており、 $x = x + \Delta x$ を実行すれば次の点が求まり、点⑤を得る。

Δx_m 掃出しにより活性な制約面 $g_m=0$ に近づくこととする tableau 内容が得られ、この tableau 内容で Δx_e 掃出しを行うと、 $g_m=0$ に沿って進む動きになる。このような Δx_e に対し常に活性な制約面に近づくこととする動きがあるため、探索での step 幅を小さくすれば $g_m=0$ から大きく離れることはない、最適解へ近づくとき Δx_e は一般に小さくなるので、 Δx_e に伴う Δx_m も小さくなり、 $\Delta x \approx 0$ になることが期待できる。

5. 簡易な探索方向ベクトル

$\frac{\partial L}{\partial x_e} = 0$ を Newton 法で解くときの Δx_e を探索方向ベクトルに用いると、差分と逆行列の計算が必要である。ここでは Simplex tableau の反復使用という単純な仕組みにするため、簡易な Δx_e を採用することにした。 Δx_m 掃出しで tableau の y 行 x_j 列に生ずる $\frac{\partial L}{\partial x_j}$ を(6)式により変換したものを Δx_e として用いる。 $-\frac{\partial L}{\partial x_j}$ を基準化し、 x_j を乗じて x の次元に直したものが(6)式である。 β_j は Δx_j のウェイトを変えるためであり、通常は $\beta_j = 1$ である。探索では Δx_e に step 幅 α を乗じて小刻みに進んでいくが、 $\frac{\partial L}{\partial x_j}$ は常に tableau に生じているので、各 step ごとに(6)式で更新していく。このため(6)式 Δx_e の探索方向が良好でない場合でも、 Δx_e は最適解に近づくように更新されていく。

6. 概要フローチャート

Δx_m 掃出し及び Δx_e 掃出しと簡易な探索方向ベクトルを用い、simplex tableau を反復使用する探索法の概要フローチャートを図-3に示す。 Δx_m 掃出しでは $g_m \leq 0$ 及び $\mu \geq 0$ の条件を満足するように掃出しを実行しているため、この条件の判定は基本的には必要ない。探索終了判定は $\Delta x \approx 0$ である。探索途中は厳密には $g_m=0$ 上に乗せていないが、もし $g_m=0$ 上に乗せるのであれば探索途中で $\Delta x_m \approx 0$ の判定を付加すればよい。概要フローチャートに基いて活荷重合成法の主断面決定の探索プログラムを作成したが、選択した制約式 g_m と制約変数 x_m をなるべく保持するため、 g_m, x_m を指定して Δx_m 掃出しを実行する形にしている。このため $\lambda_i < 0$ の制約式が含まれるので、 $x \geq 0$ の判定を加えている。LPを反復するSLPは活性な制約面が形成する許容領域の頂点を解として得るが、非線形最適化問題では制約面の交線上に解が存在し、交線上での探索が必要な場合が一般的である。このケースにSLPを適用するにはなんらかの工夫が必要である。ここで示した方法は Simplex tableau の掃出し計算を用いているが、 $\frac{\partial L}{\partial x_e}$ に基づく探索が含まれているため上記の問題は生じない。

7. まとめ

Simplex tableau の掃出し計算を反復使用して非線形最適化問題の最適解を探索する方法を示したが、① Simplex tableau の反復使用という単純な仕組みで非線形最適化問題の最適解を探索することができる。② 制約面の交線上を探索する必要がある場合でもなんら支障はない ③ この方法により実用的な探索プログラムを作成し、活荷重合成法の主断面決定の解を求めることができる。の結果が得られた。

$$\begin{aligned} ③ &= -\frac{\partial g_{r-m}}{\partial x_e} + \frac{\partial g_m}{\partial x_e} \left(\frac{\partial g_m}{\partial x_m} \right)^{-1} \frac{\partial g_{r-m}}{\partial x_m} \\ ④ &= -\frac{\partial g_m}{\partial x_e} \left(\frac{\partial g_m}{\partial x_m} \right)^{-1} \\ ⑤ &= -g_{r-m} - \Delta x_m \frac{\partial g_{r-m}}{\partial x_m} + \Delta x_e \\ &\quad \cdot \left\{ -\frac{\partial g_{r-m}}{\partial x_e} + \frac{\partial g_m}{\partial x_e} \left(\frac{\partial g_m}{\partial x_m} \right)^{-1} \frac{\partial g_{r-m}}{\partial x_m} \right\} \\ ⑥ &= \Delta x_m^T + \Delta x_e^T \left\{ -\frac{\partial g_m}{\partial x_e} \left(\frac{\partial g_m}{\partial x_m} \right)^{-1} \right\} = \Delta x \end{aligned}$$

図-2 Δx_m 掃出し, Δx_e 掃出しによる $x = x + \Delta x$ の変化

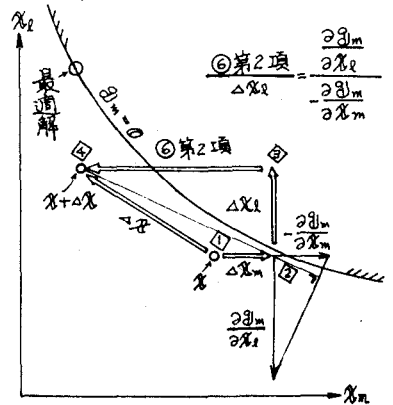


図-3 概要フローチャート

