

1. はじめに ある領域内部の点における関数値や、その微係数値を境界要素法により求めるとき、それらの値は境界値、若しくはその近似値と核関数との積を境界積分することにより与えられる。このようにして得られた解は境界からある程度離れた点においては比較的精度の良いものとなる。しかし、内点が境界近傍に位置する場合、一般に近似解の精度の低下が認められる。この原因が、境界値の補間関数による近似度、および境界積分を数値的にこなうことによって生じるものであることは既に知られており、この問題の解決に対するいくつかのアプローチも検討されている。^{1), 2)}

本研究では、上で述べた原因により生じる境界近傍での誤差を定性的、且つ定量的に評価し、その挙動を調べることを目的とし、二次元ポテンシャル問題を例に考察を行なった。

2. 条件、および仮定 次の二次元ポテンシャル問題について考える。

支配方程式: $\nabla^2 v(x) = 0$ in Ω (Ω : ポテンシャルの定義されている領域) $\cdots (1)$

今考察の対象としている領域 Ω 内の点は、ある特定の境界近傍におかれているものとし、この要素境界を $\partial\Omega_1$ 、又、全境界より $\partial\Omega_1$ を取り除いたものを $\partial\bar{\Omega}_1$ としよう。更に以下のいくつかの仮定を設ける。

- ① 考察の対象とする要素は0-次(一定)又は1-次(線形)要素とする。
- ② 内点 x は $\partial\Omega_1$ の中央点より境界に対して垂直な線上に位置するものとする。(図-1参照)
- ③ 領域の形状は本来多角形であるものとし、境界の形状近似による誤差は無いものとする。
- ④ 境界積分の際に用いられる数値積分法はGaussの偶数点積分に限る。

又、境界上におけるポテンシャル、および流束の近似関数をそれぞれ $\hat{v}, \hat{q}$ とすると、 $\partial\Omega_1$ 上における局所座標 s に関して $\hat{v}, \hat{q}$ は次式で与えられる。

$$\hat{v} = \hat{v}_1 + \frac{d\hat{v}}{ds} \Big|_1 \cdot s, \quad \hat{q} = \hat{q}_1 + \frac{d\hat{q}}{ds} \Big|_1 \cdot s \cdots \cdots (2)$$

ここで、 $\hat{v}_1, \frac{d\hat{v}}{ds} \Big|_1, \hat{q}_1, \frac{d\hat{q}}{ds} \Big|_1$ は $\partial\Omega_1$ の中央点($s=0$)における境界関数値、およびその境界線(s)方向微分値である。特に0-次要素の場合、 $\hat{v}, \hat{q}$ は(2)式において右辺第一項までで与えられる。

3. 内点における誤差評価の定式化 領域 Ω 内に設けられた点 x でのポテンシャル値 v を境界要素法(直接法)を用いて近似する場合、(2)式、および第2節での仮定により次式を得る。

$$v = -\hat{v}_1 \cdot \int_{\partial\Omega_1} q^* d\Gamma - \frac{d\hat{v}}{ds} \Big|_1 \cdot \int_{\partial\Omega_1} q^* \cdot s d\Gamma - \int_{\partial\Omega_1} \hat{q} \cdot q^* d\Gamma + \hat{q}_1 \cdot \int_{\partial\Omega_1} u^* d\Gamma + \frac{d\hat{q}}{ds} \Big|_1 \cdot \int_{\partial\Omega_1} u^* \cdot s d\Gamma + \int_{\partial\Omega_1} u^* \cdot \hat{q} d\Gamma \cdots (3)$$

但し、ここで u^* は(1)式に対する基本解であり、 u^*, q^* はそれぞれ次式で与えられる。

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, \quad q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n_y}, \quad r = |y - x|, \quad x \in \Omega, y \in \partial\Omega \cdots \cdots (4)$$

式(3)において、各要素上での積分をGaussの数値積分により計算した場合、 $\partial\Omega_1$ 上での q^* が有する強い特異性のため、主な誤差は(3)式の右辺第1,2項より生じると見て良い。そこで、以下の議論において誤差は(3)式右辺第1,2項だけから生じるものとし、他の項より生じた誤差は無視し得るものとする。

以上より、(3)式での積分をGaussの数値積分によって計算した解を $\tilde{v}$ 、又、解析的に計算した解を v とすれば、それらの差 $\Delta v = v - \tilde{v}$ は次式で与えられる。

$$\Delta v = -\frac{\rho}{2\pi} \hat{I}_1 \cdot \hat{v}_1, \quad \hat{I}_1 = I_1 - \tilde{I}_1, \quad I_1 = -\frac{2\pi}{\rho} \int_{-l/2}^{l/2} q^* ds, \quad \tilde{I}_1 = -\frac{4\pi}{\rho} \sum_{k=1}^N q_k^* w_{k,N} \cdots \cdots (5)$$

但し、ここで l は要素長、 ρ, s は図-1において示されている変数であり、 $\hat{I}_1$ は I_1 をGaussの2N点積分により数値計算した値である。又、 q_k^*, w_k は第 k 番積分点における q^* と重み係数である。(5)式での項が落ちているのは、 $\int_{\partial\Omega_1} q^* \cdot s d\Gamma$ が奇関数の積分であるため、その解析値、および偶数点数値積分値とも

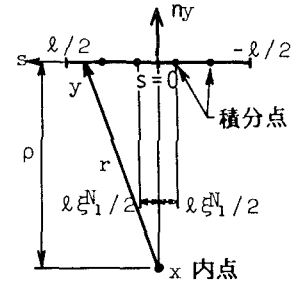


図-1 要素境界 $\partial\Omega_1$ と内点との位置関係

に0となるからである。従って、0次、1次要素に関係なく、 Δv は同一の式で与えられる。 $\hat{v}_1$ は(3)式において積分点数 N をパラメーターとした ρ の関数として与えられている。しかし、(5)の総和形式ではこの定性的特徴を把握することは困難である。そこで、本研究では、 $\hat{v}_1$ 又は $\hat{I}_1$ を定性的、且つ定量的に評価するため、以下に述べるような数値積分 $\hat{I}_1$ の近似を行なった。

まず、 I_1 は次式のようになる。

$$I_1 = \int_{-\rho/2}^{\rho/2} \frac{1}{r^2} ds = \frac{4}{a\xi N_1} \tan^{-1} \left(\frac{1}{a\xi N_1} \right) \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここで $\gamma = a \cdot \xi N_1 = 2 \cdot \rho / \ell$ であり、 ξN_1 は2N点積分の積分点の内、最も内側の点の局所座標値である。

(6)式に対する数値積分 $\hat{I}_1$ は次式で与えられる。

$$\hat{I}_1 = \frac{4}{\ell} \sum_{k=1}^N \frac{w_k}{\gamma^2 + (\xi N_1)^2} = \frac{4}{\ell} \sum_{k=1}^N \left(\frac{w_k}{\xi N_1} \right) / \left\{ a^2 + \left(\frac{\xi N_1}{\xi N_1} \right)^2 \right\}$$

ここで新しい変数として $\eta N_k = \xi N_k / \xi N_1$ 、 $\Delta \eta N_k = w_k / \xi N_1$ を導入すると、上式で $\Delta \eta N_k$ とは積分点 ηN_k が代表する領域の区間長とみなすことができ、 $\hat{I}_1$ とは $\frac{4}{\xi N_1 \ell} \cdot \int_0^{1/\xi N_1} \frac{1}{a^2 + \eta^2} d\eta$ の区分求積による近似値となり次式を得る。

$$\hat{I}_1 = \frac{4}{\xi N_1 \ell} \sum_{k=1}^N \frac{\Delta \eta N_k}{a^2 + (\eta N_k)^2}, \quad I_1 = \frac{4}{\xi N_1 \ell} \left(\int_0^{1/\xi N_1} \frac{1}{a^2 + \eta^2} d\eta + \int_{1/\xi N_1}^{1/\xi N_1} \frac{1}{a^2 + \eta^2} d\eta \right)$$

この I_1 を $\hat{I}_1$ で近似したとき、誤差が $k=1$ の項で代表される積分区間においてのみ生じると仮定すると、

$$\hat{I}_1 \approx \frac{4}{\xi N_1 \ell} \cdot \frac{\Delta \eta N_1}{a^2 + 1} + \frac{4}{\xi N_1 \ell} \cdot \int_{1/\xi N_1}^{1/\xi N_1} \frac{1}{a^2 + \eta^2} d\eta = \frac{4}{a \xi N_1 \ell} \cdot \left\{ \frac{a \Delta \eta N_1}{a^2 + 1} + \tan^{-1} \left(\frac{1}{a \xi N_1} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\Delta \eta N_1}{a} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots(7)$$

となる。(6),(7)式より $\hat{I}_1$ を近似的に求め、(5)式に適用すると Δv は次式のようになる。

$$\Delta v = \frac{1}{\pi} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{\Delta \eta N_1}{a} \right) - \frac{a}{1+a^2} \cdot \Delta \eta N_1 \right\} \cdot \hat{v}_1 \quad (a>0) \quad \dots\dots\dots(8)$$

積分点数がある程度以上多い(6点積分程度)場合、(8)式で $\Delta \eta N_k = w_k / \xi N_1 \approx 2$ として次式を得る。

$$\Delta v = \frac{1}{\pi} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{2}{a} \right) - \frac{2a}{1+a^2} \right\} \cdot \hat{v}_1 \quad (a>0) \quad \dots\dots\dots(9)$$

4. 境界近傍における誤差の挙動 (9)式により求められる Δv の挙動と、実際に(3)式を基に得られるものを図-2に示す例題を用いて比較する。領域は正方形で0次、1次要素とも各辺5分割とし、内点は境界より5,2,1,0.1,0.01の距離にとった。結果は図-3に示すように、いずれの場合にも(9)式による評価と実際の結果とが良く一致していることがわかる。又、(9)式より、 Δv の挙動は $a (=2 \cdot \rho / \ell \xi N_1)$ を用いて表わせば積分点数によらずほぼ同一のものになると思われる。このことは図-3の各例からも認めることができる。すると、これらの図からもわかるように、一般にポテンシャル値 $\hat{v}$ が大きな誤差を含むようになる点は $a=2$ の前後であるといえる。従って、 $\rho < \ell \xi N_1$ ($a < 2$)に内点をとると、Gaussの数値積分による誤差のため、ポテンシャル値の精度の低下が著しくなると予測できる。

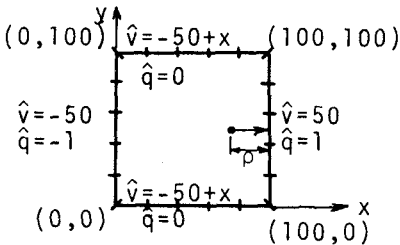


図-2 境界値、および内点位置

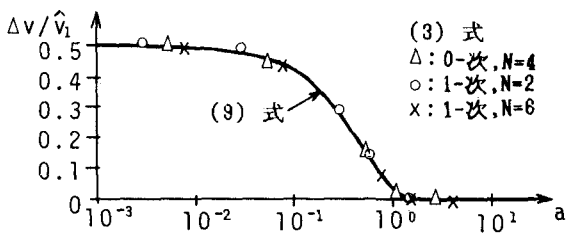


図-3 (3),(9)式に基づく Δv の挙動の比較

5. おわりに (3)式より内点でのポテンシャル値を計算するとき、Gaussの偶数点積分を用いると、その誤差は(8),(9)式により評価できることがわかった。又、誤差が大きくなり出すのは、内点が境界から $\ell \xi N_1$ の所からであり、その挙動は要素の次数、積分点数によらないことがわかった。尚、紙面の関係上、ここでは示さなかったが、内点におけるポテンシャル関数の微係数 $\frac{\partial v}{\partial x_1}$ において生じる誤差も同様の手法により評価することができる。

〈引用文献〉1)小松定夫・長井正嗣・坂本保彦：境界要素法による薄肉構造解析に関する研究、土木学会論文報告集、第333号、1983年5月

2)榎園正人・戸高孝：補正積分を使用した境界要素解析、電気学会論文集A、1986年4月