

(Ⅲ-24)

斜面安定解析で用いられる分割法計算式の厳密解

群馬大学 (正) 鶴飼恵三, 永瀬英生

1. まえがき

斜面安定解析でしばしば用いられる分割法の計算式は、通常、離散化表示されることが多いが、均一斜面の場合には積分表示が可能であり厳密解が得られる。本研究では、このことと簡便法 (Fellenius法)、簡易 Bishop 法及び Spencer法について示すと共に、いくつかの計算例を示した。対象とする斜面は C-φ-γ が一定である勾配 β の斜面 (図-1) であり、間げき水圧は間げき圧係数 $r_u = u/(r_h)$ を用いて表示する。このような研究を行なう理由は次のようである。1) 3次元斜面安定解析を行なう場合、2次元の厳密表示式が得られていると計算量を大幅に削減できる²⁾。2) 安定図表に依るかに、安全率や安定係数の算出ができる。3) 従来の離散化表示式にもとづく計算法に比べ、計算量が少ないため、多種多様なケースについて大量の計算が可能である。

2. 簡便法表示式の厳密解 (斜面先破壊)

(i) C, φ, γ, β, H が与えられたとき斜面の安全率 F と与える式
$$\frac{\gamma HF}{C} = (m_{rc} + \frac{\gamma H \tan \phi}{C} m_{rf}) / m_d$$

(ii) φ, γ, β, H が与えられたとき極限状態での C を与える式
$$\frac{\gamma H}{C} = \frac{m_{rc}}{m_d - \tan \phi m_{rf}}$$

ここで、 $m_{rc} = R_0^2 (\vartheta_{20} - \vartheta_{10})$, $m_{rf} = \frac{R_0^3}{H} \left[\cos \vartheta_{10} - \cos \vartheta_{20} + \frac{1}{3} (\cos^3 \vartheta_{20} - \cos^3 \vartheta_{10}) - \frac{1}{2} \sin \vartheta_{10} \{ \vartheta_{20} - \vartheta_{10} - \frac{1}{2} (\sin 2\vartheta_{20} - \sin 2\vartheta_{10}) \} + \frac{1}{3} \tan \beta (\sin^3 \vartheta_{20} - \sin^3 \vartheta_{10}) - \frac{1}{2} \frac{R_m}{R_0} \cos \vartheta_m \tan \beta \{ \vartheta_{20} - \vartheta_{10} - \frac{1}{2} (\sin 2\vartheta_{20} - \sin 2\vartheta_{10}) \} \right]$, $m_d = \frac{R_0^3}{H} (f_{10} - f_{20} - f_{30})$

ただし、 $R_0 = H / (\sin \vartheta_{20} - \sin \vartheta_{10})$, $R_m = \sqrt{(R_0 \sin \vartheta_{20} - H)^2 + (R_0 \cos \vartheta_{20} + H \cot \beta)^2}$, $\vartheta_m = \sin^{-1} \left(\frac{R_0 \sin \vartheta_{10}}{R_m} \right)$, $\vartheta_{10} = \cos^{-1} \left(\frac{R_m \cos \vartheta_m}{R_0} \right)$, $f_{10} = (\sin \vartheta_{20} - \sin \vartheta_{10}) / 3$, $f_{20} = l_0 (2 \cos \vartheta_{10} - l_0) \sin \vartheta_{10} / 6$, $f_{30} = \{ \sin (\vartheta_{10} - \vartheta_{10}) - l_0 \sin \vartheta_{20} \} (\cos \vartheta_{10} + \cos \vartheta_{20} - l_0) / 6$, $l_0 = \sin (\vartheta_{20} - \vartheta_{10}) / \sin \vartheta_{20} - \sin (\vartheta_{20} + \beta) (\sin \vartheta_{20} - \sin \vartheta_{10}) / (\sin \vartheta_{20} \sin \beta)$.

ϑ_{10} , ϑ_{20} を種々変化させて、 $\gamma HF/C$ もしくは $\gamma H/C$ の最小値を求める。

3. 簡易 Bishop 法表示式の厳密解 (斜面先破壊)

φ, γ, β, H が与えられたとき極限状態での C を与える式
$$\frac{\gamma H}{C} = \frac{m_{rc}}{m_d - \tan \phi m_{rf}}$$

ここで、 m_d は簡便法の場合と同じ。 $m_{rc} = R_0^2 \left[(\vartheta_{20} - \vartheta_{10}) \cos^2 \phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi \cdot \ln \left\{ \frac{\sin (\vartheta_{20} + \phi)}{\sin (\vartheta_{10} + \phi)} \right\} \right]$,

$m_{rf} = \frac{R_0^3}{H} \left\{ [I_1]_{\vartheta_{10}}^{\vartheta_{20}} - \sin \vartheta_{10} [I]_{\vartheta_{10}}^{\vartheta_{20}} + \tan \beta [I_2]_{\vartheta_{10}}^{\vartheta_{20}} - \frac{R_m}{R_0} \cos \vartheta_m \tan \beta [I]_{\vartheta_{10}}^{\vartheta_{20}} \right\}$

ただし、 $I = \vartheta \cos^2 \phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi \ln \{ \sin (\vartheta + \phi) \}$, $I_1 = \cos \phi \left[-\cos (\vartheta - \phi) + \frac{1}{2} \sin 2\phi \ln \left\{ \frac{1 - \cos (\vartheta + \phi)}{1 + \cos (\vartheta + \phi)} \right\} \right]$, $I_2 = \cos \phi \left[\sin (\vartheta - \phi) - \frac{1}{2} \sin \phi \cos \phi \ln \left\{ \frac{1 - \cos (\vartheta + \phi)}{1 + \cos (\vartheta + \phi)} \right\} \right]$.

4. Spencer法表示式の厳密解 (斜面先破壊)

φ, γ, β, H が与えられたとき極限状態での C を与える式

$$\frac{\gamma H}{C} = \frac{m_{rc0}}{m_{rf0}}, \quad \frac{\gamma H}{C} = \frac{m_{rc1}}{m_{d1} - \tan \phi m_{rf1}}$$

上式で、未知量は C と ϕ である。この連立方程式より C を求める。

ここで、 $m_{rc0} = \frac{1}{2} R_0 \cos \phi \ln \left\{ \frac{1 - \cos (\vartheta_{20} + \phi + \frac{\pi}{2})}{1 + \cos (\vartheta_{20} + \phi + \frac{\pi}{2})} \cdot \frac{1 + \cos (\vartheta_{10} + \phi + \frac{\pi}{2})}{1 - \cos (\vartheta_{10} + \phi + \frac{\pi}{2})} \right\}$, $m_{rf0} = \frac{R_0^2}{H} \left\{ [I1]_{\vartheta_{10}}^{\vartheta_{20}} - \sin \vartheta_{10} [I2]_{\vartheta_{10}}^{\vartheta_{20}} + \tan \beta [I3]_{\vartheta_{10}}^{\vartheta_{20}} - \frac{R_m}{R_0} \cos \vartheta_m \tan \beta [I2]_{\vartheta_{10}}^{\vartheta_{20}} \right\}$, $m_{rc1} = R_0^2 \left[(\vartheta_{20} - \vartheta_{10}) \cos^2 \phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi \ln \left\{ \frac{\sin (\vartheta_{20} + \phi + \frac{\pi}{2})}{\sin (\vartheta_{10} + \phi + \frac{\pi}{2})} \right\} \right]$

m_d は簡便法の場合の m_d と同じ。 $m_{rf1} = \frac{R_o^3}{H} \cos \phi \cos \delta \{ [I4]_{\theta_{10}}^{\theta_{20}} - \sin \theta_{10} [I6]_{\theta_{10}}^{\theta_{20}} + \tan \beta [I5]_{\theta_{10}}^{\theta_{20}} - \frac{R_m}{R_o} \cos \theta_m \tan \beta [I6]_{\theta_{10}}^{\theta_{20}} \}$ 。

ただし、 $I1 = \theta \{ \sin \delta \cos^2(\phi + \delta) - \frac{1}{2} \sin(2\phi + 3\delta) \} + \frac{1}{2} \sin(\theta + \phi + \delta) \sin(\theta - \phi - 2\delta) + \cos \delta \sin^2(\phi + \delta) \ln \{ \sin(\theta + \phi + \delta) \}$, $I2 = -\frac{1}{2} \sin(\phi + \delta) \cos \delta \ln \left\{ \frac{1 - \cos(\theta + \phi + \delta)}{1 + \cos(\theta + \phi + \delta)} \right\} + \sin(\theta - \delta)$, $I3 = \frac{1}{2} \theta \cos \delta \cos 2(\phi + \delta) + \frac{1}{2} \sin(\theta + \phi + \delta) \cos(\theta - \phi - 2\delta) - \frac{1}{2} \cos \delta \sin 2(\phi + \delta) \ln \{ \sin(\theta + \phi + \delta) \}$, $I4 = \frac{1}{2} \sin^2(\phi + \delta) \ln \left\{ \frac{1 - \cos(\theta + \phi + \delta)}{1 + \cos(\theta + \phi + \delta)} \right\} - \cos(\phi + \delta - \theta)$, $I5 = \sin(\theta - \phi - \delta) - \frac{1}{4} \sin 2(\phi + \delta) \ln \left\{ \frac{1 - \cos(\theta + \phi + \delta)}{1 + \cos(\theta + \phi + \delta)} \right\}$, $I6 = \theta \cos(\phi + \delta) - \sin(\phi + \delta) \ln \{ \sin(\theta + \phi + \delta) \}$ 。

なお、Spencer 法表示式のうち第2式は、 $\delta = 0$ のとき簡易 Bishop 法表示式に帰着する。

簡易 Bishop 法、Spencer 法、いずれの場合も、 θ_{10} 、 θ_{20} を種々変化させて rH/C の最小値を求める。

5. 計算例(斜面先破壊)

以上では、簡げき水圧が無い場合の表示式を示したが、ここでは簡げき水圧を有するケースについても一部計算例を示す。図-2に簡便法による計算結果を示す。この図は、有名な Taylor の安定図表とほぼ同じ値をとる。図中には簡げき水圧が存在する場合 ($r_u = 0.5$) の計算例も示した。良く知られているように、簡便法による値は簡げき水圧の影響を大きく受ける。図-3は簡便法の結果と簡易 Bishop 法の結果を比較したものである。 $\phi = 0^\circ$ のとき両者の値は同一となる。図より β が大きいときには簡易 Bishop 法による値の方が小さくなることかわかる。これは、すべり面上の垂直応力の一部が負値になるためである。図-4は簡便法の結果と Spencer 法の結果を比較したものである。図-3及び図-4より、Spencer 法による結果は、 β が大きいときは簡便法と、 β が小さいときは簡易 Bishop 法とほぼ一致することがわかる。なお、簡易 Bishop 法に簡げき水圧があるケースは発表当日報告する。

(文献)

- 山口柏樹：土質力学，技報堂（全改訂版）。
- 鶴飼，細堀，永瀬，横戸：C- ϕ 斜面の3次元安定解析，才21回土質工学研究発表会，1986（予定）
- 中瀬，中ノ堂，日下部：斜面および盛土のための安定図表，技報堂 1981。

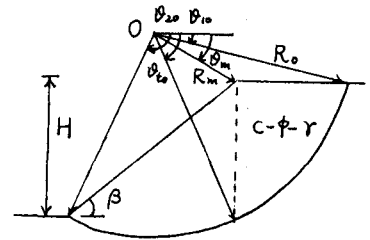


図-1 斜面の諸元

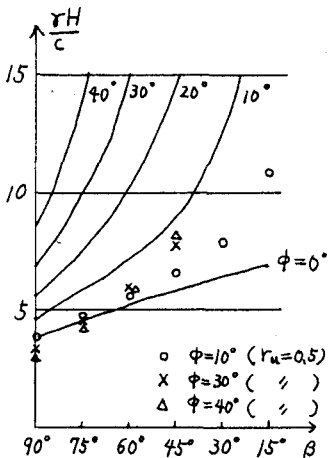


図-2 簡便法による安定図表

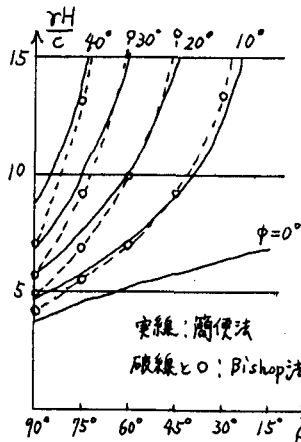


図-3 簡易 Bishop 法による安定図表

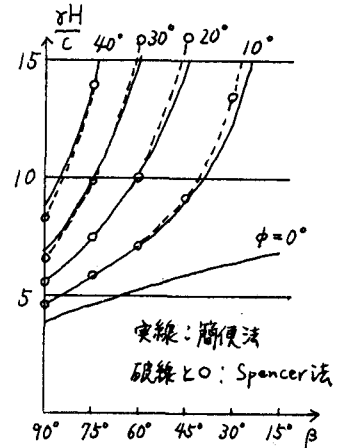


図-4 Spencer 法による安定図表