

中央大学 学生員 石井 宏美
中央大学 正 員 川原 隆人

1. はじめに

数値解法として、差分法や有限要素法が流体場の解析等に広く採用されている。しかし、これらの問題の中には、無限領域として問題も扱った方が好ましい場合もある。例えば、海岸・海洋構造物による波の回折・散乱や潮水振動などの表面波動問題である。従って、この問題について解析を行なう場合には、無限領域に伝播していく波動の影響を考慮する必要が出てくる。本報では、内部領域については、構造系の複雑さを比較的容易に取り扱うことが可能な有限要素を用い、そして、外部領域(開境界)については、有限要素の自然な拡張である写像型無限要素を用いて、解析を行なった。

2. 基礎方程式

流体は、非圧縮・非粘性・非回転の流体運動を仮定し、二次元の微小振幅波を取り扱う。簡単のため水深を一定とすると、表面波の基礎方程式は、次のヘルムホルツ方程式で表わされる。

$$\nabla^2 \eta + k^2 \eta = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

ここで、 $\eta(x,y)$ は振幅分布関数、 k は波数である。 Ω は解析領域を表わす。

ただし、全体波の振幅分布関数 $\eta(x,y)$ は次のように記述される。

$$\eta = \hat{\eta}_{in} + \eta_{sc} \quad (2)$$

$$\hat{\eta}_{in} = A \exp\{iR(x \cos \theta + y \sin \theta)\} \quad (3)$$

ここで、 η_{in} は入射波、 η_{sc} は散乱波であり、 A は入射波の振幅、 θ は入射角を表わす。 x, y は既知量を表わす。

次に、境界条件としては次式が導入される。

$$\eta_n = \hat{\eta}_n \quad \text{on } \Gamma_s \quad (4)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \eta_{sc}}{\partial n} - iR \eta_{sc} \right) = 0 \quad (\text{ゾンマーフェルトの放射条件}) \quad \text{on } \Gamma_\infty \quad (5)$$

ここで、 r は散乱源からの距離を表わす。そして、 Γ_s は構造物境界、 Γ_∞ は無限遠方の仮想境界を表わす。

3. 写像型無限要素

外部領域では、未知数として散乱波 η_{sc} を考える。そのための、用いる無限要素は、図-2(a)に示すように、1点を中心として無限に広がる要素について考える。

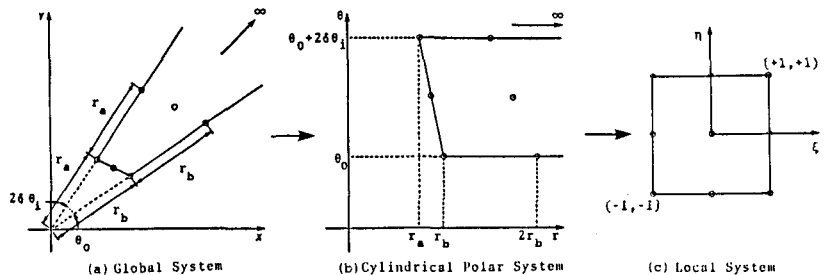


図-2 無限要素から正規化要素への写像

無限要素から正規化要素への写像としては、次に表わされる2式によって行なわれる。($\eta = +1$: $r = r_a$ のとき $r = 2r_a$, $\eta = -1$ のとき $r = \infty$)

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (6)$$

$$r = A / (1 - \eta), \quad \theta = \theta_0 + (1 + \eta) \delta \theta_2 \quad (7)$$

ただし、 $A = (r_a - r_b) \eta + (r_a + r_b)$, $\delta \theta_2 = \frac{1}{2} | \tanh(\theta_a / x_a) - \tanh(\theta_b / x_b) |$

無限要素で用いられる内挿関数 $N(\xi, \eta)$ は、散乱波 u_{sc} が 0 階のハンケル関数に比例して変化することより、次のように修正される。

$$\begin{aligned} N(\xi, \eta) &= C(\eta) \cdot M(\xi, \eta) (x+r)^{\frac{1}{2}} \exp(i\eta r) \\ C(\eta) &= (2/A)^{\frac{1}{2}} \exp(-i\eta r/2) \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、 $M(\xi, \eta)$ は通常の内挿関数である。

次に、外部領域についての汎関数は、基礎方程式に変分原理を導入することより、次のように記述できる。

$$\pi = \int_{\Omega_1} \left[\left(\frac{\partial u_{sc}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u_{sc}}{\partial \theta} \right)^2 - k^2 u_{sc}^2 \right] |J_1| |J_2| d\Omega_1 \quad \text{in } \Omega_1 \quad (9)$$

ここで、 $[J_1], [J_2]$ は、それぞれ (6)・(7) 式から求まるヤコビアン・マトリックスを表わす。上式の積分については、特別な数値積分法を用いて行なった。

4. 本手法の有効性の検証

本手法の有効性を検証するために、一定水深中に置かれた円柱による波の散乱問題について解析を行なった。初めに本報で用いた画像の特徴(利点)を示すために、無限要素と接続する境界の形が図-3の有限要素の場合について解析をした。図-4は、波数 1.0 のときの円柱表面の波高分布を表わした。実線は、MacCamy and Fuchs による理論解 (η_c) であり、本手法による解がよく一致している。この計算で用いた無限要素は、図-6の要素 (b) である。次に、計算精度を確認するために、図-6に示される2つの無限要素 (a)・(b) について解析をした。有限要素としては、図-5に示すように半径方向に2層とし、円周方向の分割数を 6・12・18・24・30・36 分割と変化させて用いた。図-6は、波数 4.0 のときの円周方向の分割数と計算誤差の関係を表わしたものである。計算誤差 (E) は、次のように定義した。

$$E = |(u_c - u_r) / u_c| \times 100 \quad (\%) \quad (10)$$

要素 (a) のときも、要素 (b) の精度とほぼ一致した結果が得られた。

5. おわりに

無限領域問題の開境界処理法として、本報では画像型無限要素を用いる方法について述べた。解析例においては、2つの無限要素について、要素分割に対して比較を行なったが、解析領域が狭いにもかかわらず精度の良い解が得られた。次に、本報の特徴としては、開境界を任意の形状に設定できることより、有限要素領域を必要最小限にすることができるようになったことが上げられる。

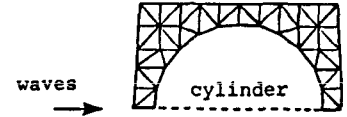


図-3 有限要素分割

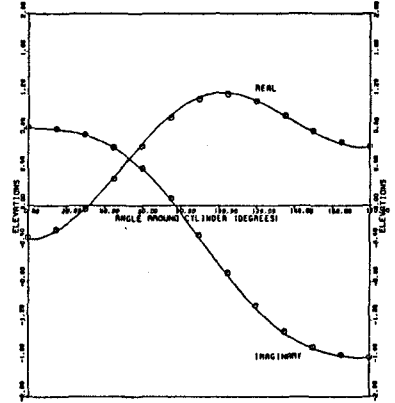


図-4 円柱表面の波高分布

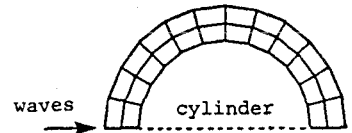


図-5 有限要素分割 (12分割)

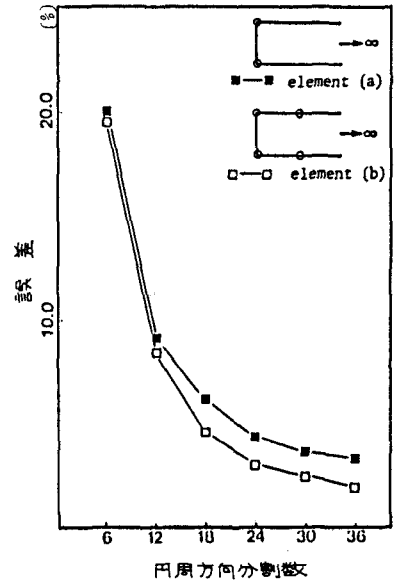


図-6 分割数と計算誤差の関係

参考文献

- 1) O.C. Zienkiewicz, P. Bettess, T.C. Chiam, C. Emson 'Numerical Methods for Unbounded Field Problems and a New Infinite Element Formulation', Computational Methods for Infinite Domain Media-Structure Interaction, AMD-VOL. 46, 1981
- 2) Zienkiewicz, O.C., Emson, C. and Bettess, P. A novel boundary infinite element, Int. J. Num. Meth. Eng., 19, 393-404 (1983)