

中央大学大学院 学生員 小澤 一彰
中央大学理工学部 正会員 川原 睦人

1. はじめに 潮汐は、周期的に同一の振動が繰り返される準定常な現象であり、半日周潮や日周潮が卓越したものである。また、物質の拡散を考える上で重要な、潮汐に依存する恒流と呼ばれる定常な現象がある。本報は、これらの潮流現象と周期的ガラーキン法⁽¹⁾を適用して解析する。潮流現象は上記のような現象であるので、時間に関する数値解を有限次数のフーリエ級数として定式化される。得られる有限要素方程式は、定常項と準定常項が達成した非線形多元連立方程式系となるが、ニュートン・ラフソン法により線形化して解く。この手法は陰解法となり、通常行なわれる逐次時間積分法による陽解法より安定性は良く、計算時間の点からも有利である。まだ、十分な結果を得るに至っていないが、これまでに得られた結果について述べる。

2. 基礎方程式 一般に、浅海長波理論が潮汐現象を記述するために適用される。流速を U_i 、潮位を ζ で示せば、基礎方程式はナビエ・ストークス方程式と鉛直方向に積分して得られる次のような式となる。

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_i U_{i,j} + g \zeta_{,i} - \tau_{ij,j} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + [(H + \zeta) U_i]_{,i} = 0 \quad (1)$$

ここで、 $\tau_{ij} = \mu_h (U_{i,j} + U_{j,i})$ で構成され、 g は重力加速度、 H は水深、 μ_h は水平渦動粘性係数を示す。添字 i は、図-1 に示す X および Y 座標を表わす。本報では簡単のため、コリオリ力や底面摩擦の効果は考えない。

境界条件としては、次の3つの条件を考える。すなわち、

$$U_i = \hat{U}_i \text{ on } S_1, \quad q_i = \tau_{ij} n_j = \hat{q}_i \text{ on } S_2, \quad \zeta = \hat{\zeta} \text{ on } S_3 \quad (2)$$

ここで、上付きの $\hat{}$ は境界で規定された値を示し、 n_i は境界の法線方向の単位ベクトルを表わす。また、 $S_1 \sim S_3$ は対応する条件を規定する境界を示す。2番目の条件は人為的境界に対応し、ここでは $\hat{q}_i = 0$ である。

空間方向の離散化は、弱形式の重み付き残差方程式を組み立てた後に、通常のガラーキン法による有限要素法の手続きを踏んで行なわれる。このとき、流速に対しては二次、潮位に対しては一次の内挿を行なう。そして、全領域に重ね合わせられた有限要素方程式は、次のように得られる。

$$\{\Pi\} = [M] \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} \right\} + [N] \{V\} + [L] \{V\} - \{f\} = 0 \quad (3)$$

ここに、 $\{V\}$ および $\{f\}$ は、未知および既知のベクトルを示し、これらは全節点の流速および潮位で構成される。また、 $[M]$ は質量マトリックス、 $[N]$ および $[L]$ は非線形および線形項によるマトリックスから構成される。

3. 周期的ガラーキン法 本報では、人為的境界での潮位が三角関数として記されるので、周期的ガラーキン法が適用される。与えられる $\{f\}$ は、角振動数 ω を持つ調和級数に展開できる。すなわち、

$$\{f\} = \{f_0\} + \sum_{j=1}^N \{f_s^j\} \sin(j\omega t) + \sum_{j=1}^N \{f_c^j\} \cos(j\omega t) \quad (4)$$

試験関数も調和級数で表わされるものとする。すなわち、

$$\{V\} = \{V_0\} + \sum_{j=1}^N \{V_s^j\} \sin(j\omega t) + \sum_{j=1}^N \{V_c^j\} \cos(j\omega t) \quad (5)$$

同様にして、重み関数 $\{V^*\}$ も調和級数で表われ、これを式(3)の両辺に掛け、周期で積分すれば、時間に関する重み付き残差方程式を得る。

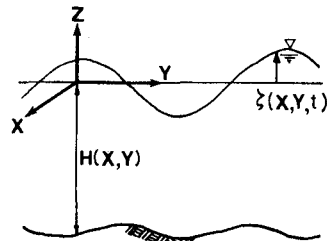


図-1 座標系

$$\int_0^{2\pi/\omega} \{V^*\} \left[[M]\{V\} + [IN]\{V\}\{V\} + [L]\{V\} - \{\hat{f}\} \right] dt = 0 \quad (6)$$

式(4)、(5)および重み関数を上式(6)に代入して整理すれば、離散化された方程式系が得られる。
すなわち、

$$\begin{aligned} IN(V_0) + IN^*(V_s, V_c) + L(V_0) &= h_0(\hat{f}_0) \\ \delta(\omega) \cdot IM_1(V_s) + IN_1(V_0, V_c) + IN_1^*(V_s, V_c) + L_1(V_c) &= h_c(\hat{f}_c) \\ -\delta(\omega) \cdot IM_2(V_c) + IN_2(V_0, V_s) + IN_2^*(V_s, V_c) + L_2(V_s) &= h_s(\hat{f}_s) \end{aligned} \quad (7)$$

これらの方程式は、 $\{V_0\}$ 、 $\{V_s\}$ および $\{V_c\}$ を未知とする連成した非線形多元連立方程式系となっている。よって、定常問題に準じて解くことができる。しかし、非線形なので適当な繰り返しの手続を導入する必要がある。本報では、ニュートン・ラフソン法が適用される。

4. 数値計算例 本手法の潮流解析への適用に対しての妥当性を調べるために、97.1%の数値解析を試みた。運動粘性係数は一定値 $\nu = 10 \text{ m}^2/\text{sec}$ とし、定常流と準定常流の両方に同じ値を用いた。

一つの例は、本手法と二段階陽解法との比較である。図-2に各々の有限要素分割を示す。図-3に示す境界条件の下で、本手法に対しては表-1の条件で数値計算を行った。

図-4には恒流成分を描いた。図-4(a)は本手法による結果であり、RUN 1に対応する。また、図-4(b)は陽解法の結果である。次に、図-5は、点P1(図-3)における潮流図表である。図-5(a)はRUN 1の線形解である。これは、繰り返し計算の初期値でもある。図-5(a')はRUN 1の非線形解である。これに対して図-5(b)に陽解法の結果を示す。

5. おわりに 本手法による結果が、陽解法の結果と良い一致を示したとは必ずしも言えない。しかし、線形解は陽解法とほぼ一致している。線形解で十分な問題に対しては、安定性や計算時間の点から見て有効な手法であると言える。準定常な成分はフーリエ級数で近似したことにより、十分な結果を得たが、定常成分は要素分割に対する依存度が強いものと考えられるので今回の要素分割は粗いものと思われる。今後、この点に改良を加えさらに解析および検討を加えて行きたい。

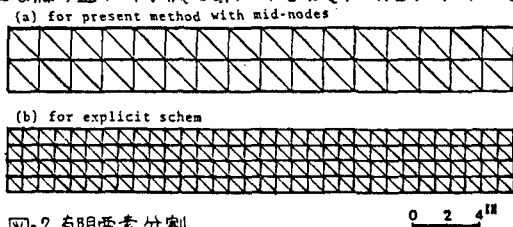


図-2 有限要素分割

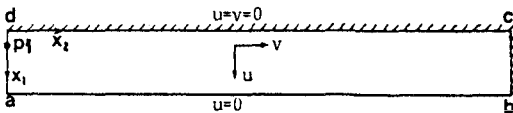


図-3 解析領域および境界、及びP1の位置

RUN	order	N	$\hat{z}(m)$	$\omega(/sec)$
1	2		$0.5 \sin \omega t$	$1.4544 \cdot 10^{-4}$

$$H=10(m) \quad g=10(m/sec^2) \quad =10(m^2/sec)$$

表-1 計算条件

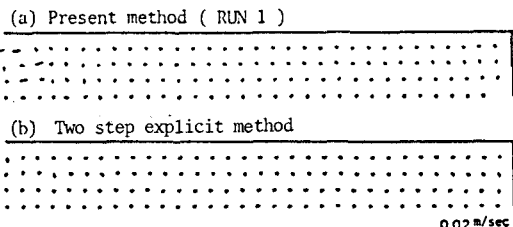


図-4 恒流成分の比較

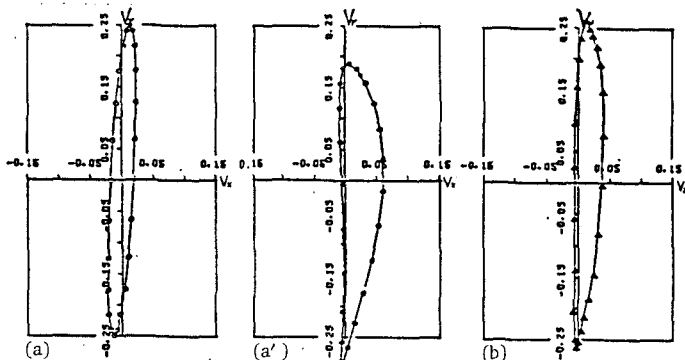


図-5 潮流図表 [(a) RUN 1の線形 (a') RUN 1の非線形 (b) 陽解法]

<参考文献> ⁽¹⁾ M.Kawahara and K.Hasegawa,

'Periodic Galerkin Finite Element Method of Tidal Flow', Int.J.num.Meth.Engng, vol.12, 115-127 (1978)

⁽²⁾ M.Kawahara et al., 'Selective Lumping Finite Element Method for Shallow Water Flow', Int.J.num.Meth.Fluid., 2 (1982)