

群馬高専 正員 平田恭久
東京都立大学 正員 伊藤文人

1. まえがき

筆者らは等式制約法と称する探索法について検討を行ってきたが、ここでは等式制約法を多目的計画法問題での Pareto 解を求めるときの非線形最適化手法として適しているかどうかについて考察を行った。等式制約法は活性でかつ有利な制約面である等式制約を選択する点に特色があるが、最初に制約式選択の方法を示し、次にこの制約式選択の仕組みを用いて Pareto 解を得る方法を説明する。

2. 等式制約法での制約式を選択

$\lambda_i \geq 0$ を満足していない (有利な制約式でない) 場合に $\lambda_i < 0$ の解消は $\lambda_i < 0$ の制約式を等式制約 g_m からはずすだけでよいが、 $g_i \leq 0$ を満足していない (制約式に抵触) 場合に $g_i > 0$ の解消には工夫が必要である。 $g_i > 0$ の解消には $g_i > 0$ の制約式を g_m に加える ($g_i = 0$ にする) 必要があるが、どの制約式を $g_i = 0$ にするかは抵触の深さと関係している。 $g_i > 0$ を解消しようとすると、 $\lambda_i \geq 0$ の制約式なら目的関数 $f(x)$ が増加する。これより抵触の深さの指標となり得るものとして $f(x)$ の変化量 (1) 式 Δf がある。双対法では Lagrange 乗数 λ による探索で $g_m = 0$ となる制約式 ($g_i \leq 0$ 及び $\lambda_i \geq 0$ を満足) を選択している。これと抵触の深さ $\Delta f = \lambda^T g_i$ とからヒントを得て等式制約 g_m 、制約変数 λ_m の選択方法を考案した。

双対法は (2) 式で示されるが、双対関数 $h(\lambda) = \min_x L(x, \lambda) = \min_x \{f(x) + \lambda^T g(x)\}$ は $L(x, \lambda)$ が x で微分可能なら (3) 式になり、これより双対法は (4) 式で表わされる。ここでは (4) 式を (5) の ①, ② の二つに分ける。

λ を固定すると (4) 式は λ について線形である。(4) 式第 2 行は Lagrange 関数の微分であるが、 λ による探索がないとすべての λ_j について必ず成立するとは限らない。(4) 式第 2 行の左半分のみを用いて (6) 式とすると、これは線形計画問題とみなせる。(6) 式を線形計画問題とみなして Simplex 法に準じた掃出し計算を行う。 $\frac{\partial L}{\partial x}$ は slack 変数に相当するが、 $\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}$ には非負条件はないので、掃出し計算での軸要素の選択は Simplex 法とは若干異なる。Simplex-tableau は下記 4. の図-1 で目的関数 f 列を除いたものとなる。(6) 式を掃出し計算で解くことにより等式制約 g_m 、制約変数 λ_m が選択でき、 λ_m または $\frac{\partial L}{\partial \lambda_m}$ (λ_m は探索変数) が得られる。このとき λ_m について $\frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0$ が成立する。

次にここで得られた λ を固定して x を変化させるが、全体の手順を (7) に示す。(4) 式的双対法を (5) のように二つに分けて解いているので、1 回の反復だけでは最適解に到達できない。(7) の手順で $\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$ が成立するまで反復することにより (4) 式第 2 行 $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ が成立する。

3. 多目的計画法の概要

多目的計画問題は複数の目的関数 (ベクトル目的関数) を持ち、(8) 式で

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot - \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^T g = \lambda^T g \quad \text{---- (1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \max_{\lambda} h(\lambda) \\ \text{subj. to } \lambda \geq 0 \end{array} \right\} \quad \text{---- (2)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda^T \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \quad \text{---- (3)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \max_{\lambda} \{f(x) + \lambda^T g(x)\} \\ \text{subj. to } \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda^T \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \lambda \geq 0 \end{array} \right\} \quad \text{---- (4)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{① } x \text{ を固定して } \lambda \text{ を変化} \\ \text{② } \lambda \text{ を固定して } x \text{ を変化} \end{array} \right\} \quad \text{---- (5)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \max_{\lambda} \lambda^T g + f \\ \text{subj. to } -\lambda^T \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \\ \lambda \geq 0 \end{array} \right\} \quad \text{---- (6)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{① } x \text{ の初期値を与える} \\ \text{② (6) 式より } g_m, \lambda_m \text{ を選択} \\ \quad (\lambda \text{ の変化), } \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0 \text{ 成立} \\ \text{③ 選択した } g_m, \lambda_m \text{ について} \\ \quad g_m = 0 \text{ を解く } (\lambda_m \text{ の変化}) \\ \text{④ この } \lambda_m \text{ で ② を再現} \\ \quad \lambda_m \text{ または } \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} \text{ の精算} \\ \text{⑤ } \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \text{ なら終了, } \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \text{ 成立} \\ \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} \neq 0 \text{ なら } \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \text{ となる} \\ \quad \Delta x_2 \text{ を求め, } x_2 = x_2 + \Delta x_2 \\ \quad \text{として ② へ行く } (x_2 \text{ の変化}) \end{array} \right\} \quad \text{---- (7)}$$

表わされるが、制約式は1目的計画と同じである。多目的計画では1目的計画(スカラー目的関数)のような通常の最適解ではなく、Pareto 解の集合が得られる。Pareto 解だけでは工学的問題の解としてはあまりにも範囲が広すぎるので、1目的計画の最適解に相当する唯一の解(または適当な範囲の解集合)が必要になる。このためには各目的関数間のバランスを考慮した決定者の判定が必要である。

Pareto 解でなければ他の目的関数を改善せずにある目的関数を改善することができるので、多目的計画での唯一の解はPareto 解から選ばれるべきである。Pareto 解を得る方法としてスカラー化手法があり、これには①最大成分最小化法(9)式、②加重和最小化法(10)式、③E-制約式法(11)式がある。いずれも目的関数はスカラー化されており、(9)、(10)式では $f_k, k=1, \dots, p$ の重み係数 w_k を、(11)式では f_p (f_p 以外の目的関数 $f_k, k=1, \dots, p-1$)の最大恒制限 ε_k を変化させることにより種々のPareto解が得られる。

多目的計画で唯一解を求める方法として、①目的関数について目標 f^* を定め、目標点からの距離関数を最小にする点を妥協解として選ぶ ② $f(x)$ 以外に超目的関数(決定者の選好目的関数)を導入して、Pareto解集合の中から選好最適解を選ぶ があるが、ここは直接関係ないので触れない。

4. 等式制約法で Pareto 解を求めるときの処理

(9)~(11)式はスカラー最適化問題であるが、これを解くには非線形最適化手法が必要である。上記2.で述べた等式制約法での制約式選択の方法を用いてPareto解を求める仕組みを図-1で説明する。

① f 列は代表となる目的関数であり、(9)~(11)式の最小化すべき目的関数を入れ、掃出し行(x_j 行)の選択は f 列のみを対象とする。 $f_1 \sim f_p$ 列は目的関数としての掃出しは行わなくてもよいが、この列も掃出ししておくとも f_k についての情報が得られる。②(9)式では現時点での $\max_k w_k f_k$ を f 列に入れ、 $w_k f_k$ の探索により $\max_k$ でなくなると、次の $\max_k w_k f_k$ と入れ替える。(9)、(10)式では制約式は g のみであるが、(11)式では f_p も制約式 g_{f_p} 、 $k=1, \dots, p-1$ になるので、 g と同じく符号を変えた $-g_{f_k}$ 、 $-\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ を入れ、制約式として掃出し計算を行う。④(11)式で $g_{f_k} = f_k - \varepsilon_k$ が活性であるようにするには、 g_{f_k} 列が掃出し列になっていない($-g_{f_k} > 0$)場合は $-g_{f_k} < 0$ となるように ε_k を小さくする。⑤(11)式では g_{f_k} のLagrange乗数 λ_{f_k} が f_p と f_k とのtrade-off比(12)式になっており、選好最適解を求めるときに利用される。(10)式では重み係数比 $\frac{w_k}{w_p}$ が(11)式の λ_{f_k} に相当している。(9)式では λ_{f_k} に相当するものが得られていないが、Pareto 解に到達したとき最大成分以外の f_k (最大成分が f_p であったとする)を $g_{f_k} = 0$ とみなして掃出し計算を行うと(12)式 λ_{f_k} が求まる。

$$\left. \begin{aligned} \min_x f(x) \\ \text{subj. to } g(x) \leq 0 \end{aligned} \right\} \text{---(8)}$$

$$\left. \begin{aligned} \min_x \max_k \{w_k f_k(x)\} \\ \text{subj. to } g(x) \leq 0 \end{aligned} \right\} \text{---(9)}$$

$$\left. \begin{aligned} \min_x w^T f(x) = \sum_{k=1}^p w_k f_k(x) \\ \text{subj. to } g(x) \leq 0 \end{aligned} \right\} \text{---(10)}$$

$$\left. \begin{aligned} \min_x f_p(x) \\ \text{subj. to } f_p(x) \leq \varepsilon \\ g(x) \leq 0 \end{aligned} \right\} \text{---(11)}$$

$$\lambda_{f_k} = -\frac{\Delta f_p}{\Delta f_k} \text{---(12)}$$

図-1

	基底		目的関数 f_k		制約式 $g_i(\lambda_i)$		slack変数 $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$		
	f	f_1	$\dots$	f_p	g_1	$\dots$	g_m	$\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$	
x_j									$f_k, -g_i$
								1	$\frac{\partial f_k}{\partial x_j}, -\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$
								1	
								1	

λ_m または $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$

5. まとめ

等式制約法を多目的計画法へ応用することを試みたが、①Pareto 解を求める(9)~(11)式について同じ掃出し方法を用いて扱うことができる ②等式制約法ではLagrange乗数を常に計算しているのでtrade-off比を得るのに便利である ③各目的関数 f_k についても掃出しを行うと f_k についての情報が得られる ④Kuhn-Tucker必要条件を満足するように探索しているので探索終了判定が確実である 等の利点があるので、等式制約法はPareto 解を求めるときの非線形最適化手法として活用することができる。

参考文献 志水清孝: 多目的競争の理論, 共立出版