

防衛大学校土木工学教室 学生員〇北小路雅倫

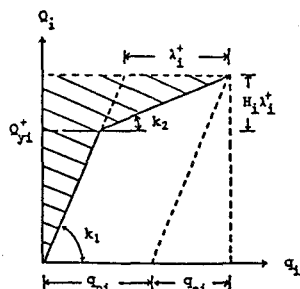
" 正員 三原 徹治

" 正員 石川 信隆

**1. 緒言** 弾性限を超えたある荷重レベルでの応力や変形状態を荷重増分法を用いずに簡単な定式化、短い計算時間で、しかも大規模構造まで容易に算定できるようになれば極めて便利である。従来、終局変形解析に関する研究としては、Grierson<sup>1)</sup>や著者ら<sup>2)</sup>を始め多くなされてきたが、最近、大久保<sup>3)</sup>はQPアルゴリズムとエネルギー原理を直接ドッキングさせることにより弾塑性時の変形を求めている。本研究は、従来の研究<sup>1), 2)</sup>をさらにコンパクトな形にまとめ、しかもI.C.P. (Linear Complementarity Programming) アルゴリズムを開発して、任意の荷重レベルに対して大規模構造物の弾塑性時における応力や変形状態を容易に求め得るような汎用プログラムの開発を企図したものである。

**2. ホロノミック弾塑性解析** 弾塑性解析には、全変形理論に基づき過去の荷重履歴とは無関係にある荷重レベルでの構造物の弾塑性変形状態を求めるホロノミック解析と、ひずみ増分理論に基づき荷重経路に依存し除荷の影響を考慮しながら逐次荷重～変形関係を追跡する増分解析とがある。本研究は、大規模構造物への適用を鑑み、前者のホロノミック解析を採用するものである。

(1) 基本式：全変形理論によるコンプレメンタリーエネルギー最小化の方法に基づけば、ホロノミック解析の基本式は表-1のようにQP (二次計画法) 問題として表わされる<sup>1)</sup>。ここに、式(1)は図-1の斜線部のコンプレメンタリーエネルギーを最小化することを、式(2)は平衡条件(F)、式(3)は降伏条件(Y)を表わしている。またQは内力ベクトル、 $K^1$ は集合柔性マトリックス、Cは適合マトリックス、 $\lambda$ は塑性乗数ベクトル、Hは硬化係数マトリックス、Rは塑性容量ベクトル、Nは降伏線の単位外向き法線マトリックス、Fは外力ベクトルである。上記のQP問題にKuhn-Tucker条件を適用すれば、



式(4)に示す変形適合条件(C)、式(5)に示す塑性流れ条件(P)および式(2)、(3)が得られ、これらはホロノミック解析の必要かつ十分条件である。よって、式(2)～式(5)を同時に満足する解を得るために、表-2のようなI.C.P問題を定式化する。式(6)はZの最小値すなわち0となったとき、塑性流れ条件(P)が満足されることを示し、式(7)は式(2)、(3)、(4)を1つのコンパクトな形にまとめたものである。

表-1 QP問題

|        |                                                                                     |     |
|--------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 未知数 :  | $Q, \lambda$                                                                        |     |
| 目的関数 : | $\Pi = \frac{1}{2} Q^T K^{-1} Q + \frac{1}{2} \lambda^T H \lambda \rightarrow \min$ | (1) |
| 制約条件 : | (E) : $C^T Q = F$                                                                   | (2) |
|        | (Y) : $\phi = N^T Q - H \lambda - R \leq 0$                                         | (3) |

$$(C) : N \lambda - C u + K^1 Q = 0 \quad (4)$$

$$(P) : \phi^T \lambda = 0 \quad (5)$$

表-2 I.C.P問題

|        |                                           |     |
|--------|-------------------------------------------|-----|
| 未知数 :  | $\phi, \lambda$                           |     |
| 目的関数 : | $Z = (-\phi^T) \lambda \rightarrow \min$  | (6) |
| 制約条件 : | (E) + (C) + (Y) : $D \lambda - \phi = -B$ | (7) |
| ただし    | $B = N^T K C K^1 F - R$                   |     |
|        | $D = N^T (K C K^1 C^T K - K) N - H$       |     |
|        | $K^1 = (C^T K C)^{-1}$                    |     |

(2) I.C.P問題の解法：式(6)は $\phi$ と $\lambda$ が互いに未知数となっているために、どちらかを当初既知数として取り扱うことにすれば、I.P問題に帰着する。すなわち、当初目的関数の式(6)の $\phi$ を既知数 $\phi$ として初期値を代入し、表-3のI.Pタブローを解いたうえで、新たに求められた $\phi$ を改めて目的関数の $\phi$ に代入して繰り返す手法を用いる。最終的に $Z=0$ となったとき正解を得る。

表-3 I.P.タブロー

|      | $\lambda_1^+$ | $\lambda_1^-$ | ... | $\lambda_n^+$ | $\lambda_n^-$ | $\phi_1^+$ | $\phi_1^-$ | ... | $\phi_n^+$ | $\phi_n^-$ |          |
|------|---------------|---------------|-----|---------------|---------------|------------|------------|-----|------------|------------|----------|
| 目的関数 | $\phi_1^+$    | $-\phi_1^-$   | ... | $-\phi_n^+$   | $-\phi_n^-$   | 0          | 0          | ... | 0          | 0          | Z        |
| 制約条件 | $d_{11}$      | $d_{12}$      | ... | $d_{1m-1}$    | $d_{1m}$      | 1          |            |     |            |            | $-b_1^+$ |
|      | .             | .             |     | .             | .             |            | 1          | .   |            |            | $-b_1^-$ |
|      | .             | .             |     | .             | .             |            |            | .   | .          |            | .        |
|      | $d_{m1}$      | $d_{m2}$      | ... | $d_{mm-1}$    | $d_{mm}$      |            |            |     | 1          |            | $-b_n^-$ |

ただし、 $m = 2n$

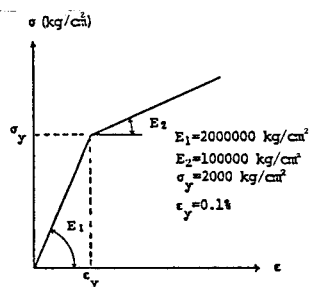


図-2 応力～ひずみ関係

3. 計算例 本法の妥当性と効率性を示すために、図-2のような材料特性をもつ図-3のような10部材トラス<sup>3)</sup>に対する解析を行った。I.C.P.計算の収束過程を示せば表-4のようになり、最終的な結果を表-5に示し、文献<sup>3)</sup>の結果と比較した。終局変形図は図-4のようになる。

4. 結言 (1)表-4よりI.P.の2回の繰り返しで正解が得られ、極めて効率の良い解法であることが認められた。(2)表-5より従来の解とも一致しており、本法の妥当性が示された。(3)従来、ホロノミック解析は、崩壊荷重レベルに対する終局変形のみを求めるために用いられたが<sup>1),2)</sup>、本研究によって弾性限を越えた任意の荷重レベルに対しても適用可能であることを確認した。(4)本法は軸力や曲げなどの単独な応力を受ける場合のみならず、これらの組合せ応力を受ける場合、さらに立体骨組構造などへの応用が可能である。

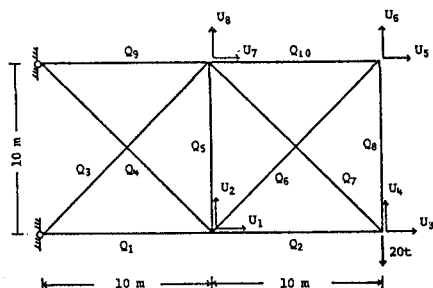


図-3 10部材トラス

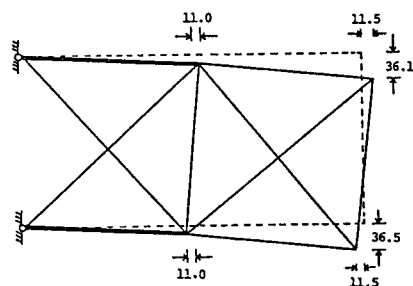


図-4 終局変形図 (太線は降伏部材を示す, 単位:cm)

参考文献 1)Grierson, D. E.; Deformation Analysis at Plastic Collapse, Engineering Plasticity by Mathematical Programming, Pergamon Press, pp.351-366, 1979. 2)Ishikawa, N. et. al.; Ultimate Deformation Analysis of Framed Structures under Variable Repeated Loadings, Memoirs of the National Defense Academy, Vol.20, No.2-3, pp.37-50, 1980.9. 3)大久保, 和多田; エネルギー原理に基づく非線形構造解析法の比較について, 第40回土木学会年講, 第1部, pp.339-340, 1985.9.

表-4 I.C.P.の収束過程

| Iter. | Z     | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ | $\lambda_4$ | $\lambda_5$ | $\lambda_6$ | $\lambda_7$ | $\lambda_8$ | $\lambda_9$ | $\lambda_{10}$ |
|-------|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|----------------|
| 1     | 18.99 | -9.474      | 0.0         | 0.0         | 0.0         | 0.0         | 0.0         | 0.0         | 0.0         | 9.517       | 0.0            |
| 2     | 0.0   | -9.474      | 0.0         | 0.0         | 0.0         | 0.0         | 0.0         | 0.0         | 0.0         | 9.517       | 0.0            |

( $\lambda_i = \lambda_i^+ - \lambda_i^-$ )

表-5 解析結果および従来の解との比較

|                     | 変位 (cm)        |        |        |        |       |        |       |          |
|---------------------|----------------|--------|--------|--------|-------|--------|-------|----------|
|                     | $U_1$          | $U_2$  | $U_3$  | $U_4$  | $U_5$ | $U_7$  | $U_8$ |          |
| 本 法                 | -10.97         | -12.38 | -11.52 | -36.54 | 11.47 | -36.09 | 11.02 | -12.43   |
| 荷重増分法 <sup>3)</sup> | -10.98         | -12.39 | -11.52 | -36.55 | —     | —      | —     | —        |
|                     | 軸力 (x 1000 kg) |        |        |        |       |        |       |          |
|                     | $Q_1$          | $Q_2$  | $Q_3$  | $Q_4$  | $Q_5$ | $Q_7$  | $Q_8$ | $Q_{10}$ |
| 本 法                 | -29.98         | -11.04 | -14.17 | 14.11  | -1.02 | -12.67 | 15.64 | 8.96     |
| 荷重増分法 <sup>3)</sup> | -29.98         | -11.04 | -14.17 | 14.11  | —     | —      | —     | —        |