

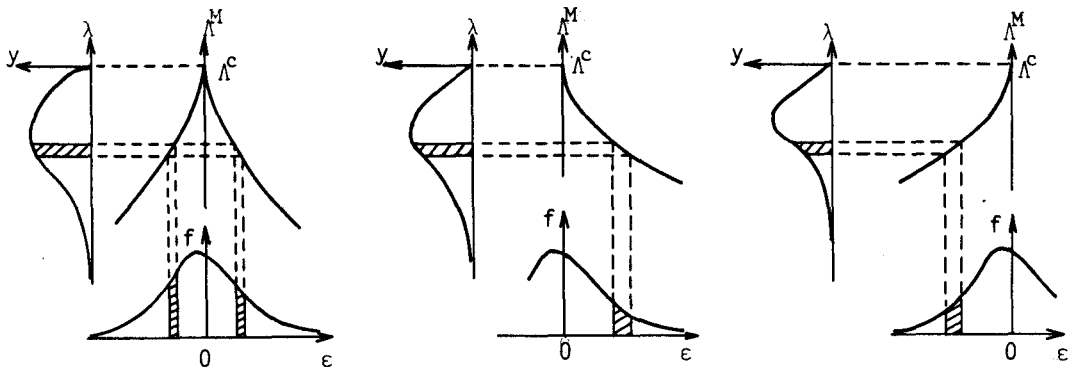
1. まえがき

構造物或いはそれを構成する部材の強度は一般に、材料の力学的性質、製造時の寸法等のばらつきにより不確定量となる。一方、弾性座屈、或いは特定の細長比をもつ圧縮柱のような場合の弾塑性座屈に見られる強度の低下は、幾何学的初期不整に対して極めて鋭敏である。このような場合、強度低下に対する初期不整の影響は重要である。以上のことから、幾何学的初期不整の統計的特徴が、確率変数としての弾性座屈強度に及ぼす影響について考察することには意味があると思われる。

座屈形態を不安定対称分岐座屈、及び非対称分岐座屈に限って見ても、以上の点に関する研究はいくつかなされてきている。例えばThompson¹⁾は、座屈強度の分布形状が、完全系での座屈強度の近傍において示す普遍的特徴について述べており、不安定対称分岐座屈では座屈強度の確率密度関数の値が強度低下の1/2乗に比例し、非対称分岐座屈では1乗に比例することが示されている。Roorda²⁾は、初期不整が正規分布に従う時の強度分布における期待値、及び分散が初期不整の統計量とどのように関係しているかについて調べ、例えば初期不整が期待値ゼロ、標準偏差 σ の正規確率変数である場合、強度低下の期待値が不安定対称分岐座屈で $\sigma^{2/3}$ 、非対称分岐座屈で $\sigma^{1/2}$ に比例し、分散はそれぞれ $\sigma^{4/3}$ 、 σ に比例することを示した。しかし、初期不整は必ずしも正規分布に従うとは限らず、他の分布の場合について考察することも必要であろう。そこで本報告は、期待値ゼロ、分散 σ^2 の非対称な分布を初期不整の確率密度関数に選び、その場合の座屈強度の低下への確率的影響について調べたものである。

2. 強度低下の確率密度関数、確率分布関数

本研究で対象とした座屈形態は不安定対称分岐座屈と非対称分岐座屈の2種類である。強度としては座屈耐力 Λ^M を用いることにする。このとき、完全系における強度を Λ^0 とすれば、何らかの初期不整を伴っている下での強度の変化 λ は、 $\lambda = \Lambda^M - \Lambda^0 < 0$ で与えられる。カタストロフィー理論によれば、上に挙げた2形態の座屈においては、座屈現象を記述するために考慮すべき初期不整の数は1つでよい。そこで、他の初期不整による要因をも含んだ確率密度関数 $f(\epsilon)$ を持った、初期不整の代表量を ϵ としよう。この不整量 ϵ と強度低下 λ との確率密度関数同志の関係を示すと図-1(a)~(c)のようである。



(a) 不安定対称分岐座屈

(b) 非対称分岐座屈 $\epsilon \geq 0$ (c) 非対称分岐座屈 $\epsilon \leq 0$

図-1 初期不整から強度低下への確率密度関数の変換

(1) 不安定対称分岐座屈の場合、強度低下の確率密度関数 y は式(1)により与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= -(C\epsilon)^{2/3} \quad C>0: \text{定数}, \eta = -(\epsilon/\sigma)^{2/3}, \epsilon\eta = \sigma(-\eta)^{3/2} \geq 0 \\ y(\eta) &= \frac{3}{2} [f(-\epsilon_\eta) + f(\epsilon_\eta)] \cdot \sqrt{|\eta|} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 σ は初期不整の分布における標準偏差、 η は強度低下を上式のように標準化したものである。

(2) 非対象分岐座屈の場合、初期不整の確率密度関数が非対象なとき、 ϵ の符号により強度低下の確率密度関数は式(2)、(3)で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= -(C\varepsilon)^{1/2}, \quad \eta = -(\varepsilon/\sigma)^{1/2}, \quad \varepsilon\eta = \sigma\eta^2 \geq 0 \\ y(\eta) &= 2f(\varepsilon_\eta) \cdot |\eta| / \int_0^\infty f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (\varepsilon \geq 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= -(C|\varepsilon|)^{1/2}, \quad \eta = -\{|\varepsilon|/\sigma\}^{1/2}, \quad \varepsilon\eta = -\sigma\eta^2 \leq 0 \\ y(\eta) &= 2f(\varepsilon_\eta) \cdot |\eta| / \int_0^\infty f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (\varepsilon \leq 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

尚、(1)、(2) 共に確率分布関数 Y は、 $Y(\eta_0) = \int_{-\infty}^{\eta_0} y(\eta) d\eta$ で与えられる。又、式(2)、(3) で確率密度関数の分母が $\int_0^\infty$ 、 $\int_{-\infty}^0$ となっているのは $Y(0) = 1$ とするためである。

3. 強度低下の期待値、分散について

初期不整が期待値ゼロ、分散 σ^2 の分布に従うときに正規分布とは別の分布をとったとすると、その違いが強度低下に及ぼす影響として、期待値と分散を例に示す。初期不整の分布には期待値ゼロ、分散 σ^2 のガンマ分布とワイブル分布を考え、その分布形状を表現するために、確率密度関数の期待値から下限値までの距離を σ で除した値³⁾の逆数を γ とし、これを用いた。強度低下の期待値と分散は式(1)～(3)の関係をを用いれば式(4)、(5)のようになる。

$$E[\lambda] = (C\sigma)^{2/3} \cdot M_S(\gamma), \quad \text{Var}[\lambda] = (C\sigma)^{4/3} \cdot V_S(\gamma) \quad (\text{不安定対称}) \dots\dots (4)$$

$$E[\lambda] = (C\sigma)^{1/2} \cdot M_A(\gamma), \quad \text{Var}[\lambda] = (C\sigma) \cdot V_A(\gamma) \quad (\text{非対称}) \dots\dots (5)$$

ここで、 M_S 、 M_A は各座屈形態における強度低下の標準化変数 η における期待値、 V_S 、 V_A は分散であり、いずれも γ のみの関数であり図-2、3のようになる。ガンマ分布においては不安定対称分岐座屈の場合、期待値 M_S の γ による変化は放物線で近似でき、分散 V_S は一定となる。非対称分岐座屈の場合、 M_A 、 V_A 共に $\gamma < 0.3$ でほぼ直線となる。一方ワイブル分布の場合、 $\gamma \rightarrow 0$ としても正規分布へ近づかないため、ガンマ分布に見られるような顕著な特徴はないが、 M_S 、 V_S は $\gamma = 0.1 \sim 0.2$ で、又、 M_A 、 V_A は $\gamma = 0.3 \sim 0.4$ の範囲で正規分布と近い値を示すことがわかる。 M_A 、 V_A が $\gamma = 0.3 \sim 0.4$ で正規分布の場合と近い値を示した理由として、非対称分岐座屈の場合、対象となる初期不整が正、負いずれか一方であるため、強度低下の期待値や分散が正規分布の場合と近い値をとるには初期不整の分布形状ができるだけ正規分布に近く対称となることが必要であること、ワイブル分布の形状が $\gamma = 0.3 \sim 0.4$ でほぼ対称となり正規分布に近づくことが考えられる。

4. まとめ

非対称分岐座屈での強度低下における確率的性質は、不安定対称分岐座屈の場合に比べ初期不整における分布形状の非対称性に対して鋭敏であるといえる。非超過確率の特性値についても同様の結果が得られたがその詳細は当日発表の予定である。

(参考文献) 1)Thompson, J.M.T: Towards a general statistical theory of imperfection-sensitivity in elastic post-buckling, J.Mech.Phys.Solids, Vol.15, 1967
2)Roorda, J: Some statistical aspects of the buckling of imperfection-sensitive structures, J.Mech.Phys. Solids, Vol.17, 1969
3)Chou, T and Koyama, K: Probability distributions by standardized variate, Proc.of. JSCE, NO.362, pp225 ~228, 1985

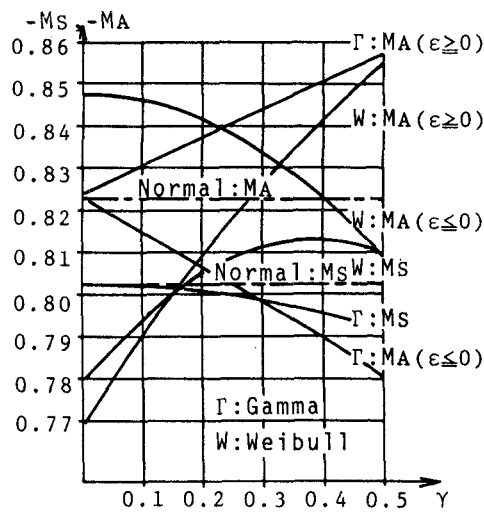


図-2 強度低下の期待値

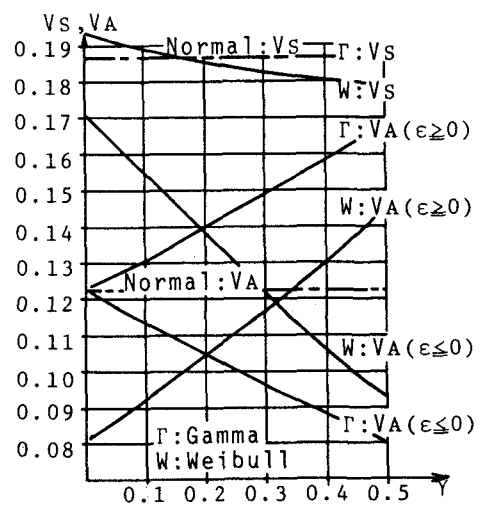


図-3 強度低下の分散