

境界型有限要素法の高次要素の適用について

中央大学 学生員 ○桜井 英行

中央大学 学生員 榎山 和男

中央大学 正 員 川原 睦人

1. はじめに

著者らは、すでに表面波解析のための境界型有限要素法を提案し、その有効性を示してきた。^{(1),(2)} この方法は、未知変数の近似多項式としてヘルムホルツ方程式の解を満足する式を用いる方法であり、境界要素法の考えを導入した有限要素法であるといえる。

これまでは、三節点三角形要素、及び四節点四角形要素を用いた場合を検討してきたが、本報本では、新たに高次要素の本手法への適用について検討する。要素としては、八節点の四角形要素を用い、簡単な例題により、その妥当性・有効性の検証を従来の有限要素法による計算結果との比較によって行なう。

2. 境界型有限要素法

流体は、非圧縮・非粘性・非回転とする。ここでは2次元の微小振幅波を取り扱う。現象は時間的に調和であると仮定すると、表面波の基礎方程式は次のヘルムホルツ方程式で表わされる。

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

ここで、 ϕ は2次元のポテンシャル関数、 k は波数、 Ω は解析領域である。境界条件としては、ポテンシャル関数 ϕ 、及び境界に対して外向き法線方向の中の微分値 ϕ_n が導入される。

$$\phi = \hat{\phi} \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (2) \quad \phi_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} = \hat{\phi}_n \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (3)$$

ここで、 Γ_1 、 Γ_2 はそれぞれ ϕ 、 ϕ_n が与えられる境界を表わし、 $\hat{\phi}$ はその既知量を表わす。

境界型有限要素方程式を導くにあたり、変分原理を導入する。基礎方程式と境界条件式とに等価な汎関数は、

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \phi)^2 d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} k^2 \phi^2 d\Omega - \int_{\Gamma_2} \phi \hat{\phi}_n d\Gamma \quad (4)$$

ここで、右辺第一項を部分積分して、近似多項式に基礎方程式の解を満足するものを用いると、本手法における汎関数は最終的に次のようになる。

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \phi \phi_n d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \phi \hat{\phi}_n d\Gamma \quad (5)$$

有限要素として図-1に示すような八節点四角形要素を用いる。なお要素座標系は要素の重心を原点とするデカルト直交座標系を用いる。そして、近似多項式は、基礎方程式の解を満足する次式を用いる。

$$\begin{aligned} \phi = & \alpha_1 \sin kx + \alpha_2 \sin ky + \alpha_3 \cos kx + \alpha_4 \cos ky \\ & + \alpha_5 \sin \frac{k}{2}x \cdot \sin \frac{k}{2}y + \alpha_6 \sin \frac{k}{2}x \cdot \cos \frac{k}{2}y + \alpha_7 \cos \frac{k}{2}x \cdot \sin \frac{k}{2}y + \alpha_8 \cos \frac{k}{2}x \cdot \cos \frac{k}{2}y \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $\alpha_1 \sim \alpha_8$ は未定数、 x, y は要素内の任意の座標である。(6)式を用いて(4)式の汎関数を停留化すると、境界型有限要素方程式が得られる。

図-2は、 1×1 の正方形要素における ϕ の内挿関数をプロットしたものである。このとき波数 k は要素内にちょうど $\frac{1}{2}$ 波長入るようなもの($k = \pi = 3.142$)を選んでいる。

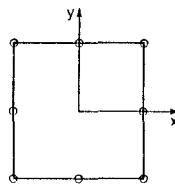


図-1

有限要素と座標系

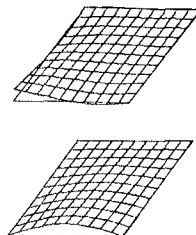


図-2 内挿関数

3. 本手法の有効性の検証

本手法の有効性を検証するために、まず一定水深で二次元的水路の自由振動問題を取り扱う。解析は、図-3に示す有限要素分割と境界条件のもとに解が振動のモードとなるような波数を選び行った。このとき波数 k とポテンシャル中は次式で与えられる。

$$k = \frac{\pi}{L} m, \quad \phi = \cos \frac{\pi m}{L} x \quad (7)$$

ここで L は水路長、 m はモードである。図-4は、9次モードの場合の計算結果を示したものである。図中、実線は(7)式で与えられる理論解、○印は本手法による計算結果、×印は2次の補間関数を用いた従来の有限要素法による計算結果である。図から本手法による計算値は、実線の理論解とよく一致していることがわかる。

次に、等水深長方形湖の自由振動問題に適用する。湖は、100m×100mの正方形湖とし、領域を分割する要素数、節点数を変化させて各振動モード(m, n)における固有値の計算を行った。この場合の固有値 k は次式で表わされる。

$$k^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (8)$$

ここで、 m, n はそれぞれ x, y 方向の節の数、 a と b はそれぞれ湖の x, y 方向の長さである。図-5は、節点数と固有値の誤差の関係を示したものである。図で○印が本手法による誤差、△印が2次の補間関数を用いた従来の有限要素法による誤差である。この結果から本手法による誤差は従来の有限要素法に比べて非常に小さいことがわかる。そして、同じ解析誤差を許容するならば、本手法では大幅に節点数を節約できると言える。

4. おわりに

以上のように、高次要素の本手法への適用として、八節点四角形要素を開発し、その妥当性・有効性を検証した。今後、高次要素を用いた本手法の実際問題への適用について検討を行なう。

参考文献

- 1) 樫山, 川原: 波動解析のための境界型有限要素法について, 第38回年講, 1983, pp295-296
- 2) 樫山, 桜井, 川原: 三角関数を用いた境界型有限要素法による線形表面波の解析, 第5回流れの有限要素法解析シンポジウム報文集, 1984

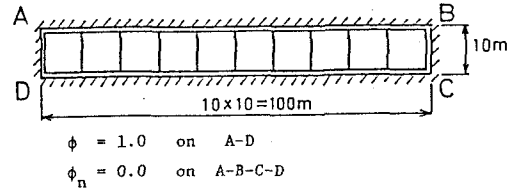


図-3 有限要素分割図と境界条件

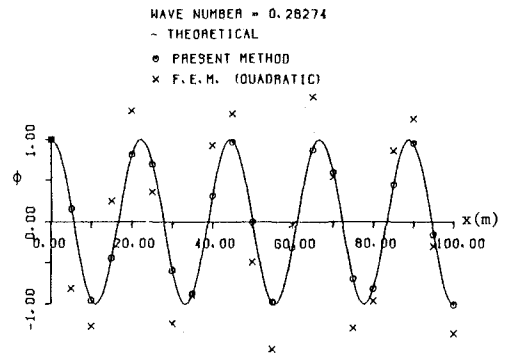


図-4 計算結果(9次モード)

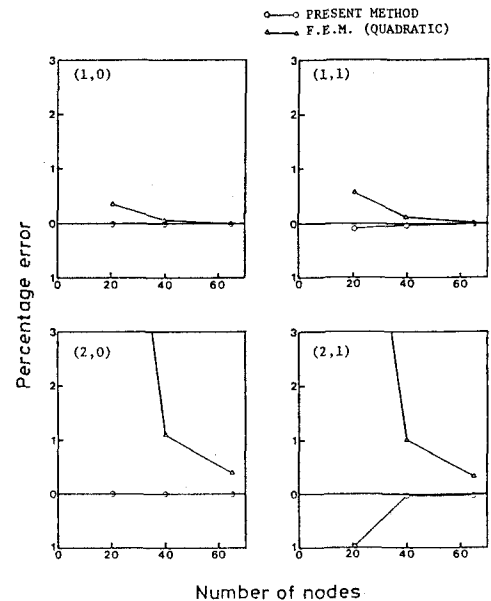


図-5 節点数と固有値誤差の関係