I－1　双曲的へそのカタストロフィーの座屈形態について

○新潟大学大学院　学生員　阿部　和久
新潟大学工学部　正会員　丹　泰美

1．はじめに

従来、構造物における座屈問題で対照とする系は、基本的には初期不整の無い完全系のものであった。完全系から得られる平衡径路は分岐座屈点においていくつかの分岐径路を持ったものとなる。又、ある微小な初期不整を持つ系の場合に得られる平衡径路が、完全系での径路の極めて近くを通るものになることはわかる。しかし、任意の初期不整の存在の下で、その径路の形態がどのように変化してゆき、更にどれだけの種類の基本形態をとり得るのかを知ることは、これまでの解析手法では、不可能、若しくは困難なことであった。そこで、本研究ではカタストロフィー理論を用い、座屈現象に双曲的へそのカタストロフィーが現われる場合を例にとり、その座屈点の近傍における系の力学的特徴を調べることを試みた。

2．双曲的へそのカタストロフィーについて

へそのカタストロフィーに関する現象は実際の構造物においては、全体座屈と局部座屈が同時に起こる、いわゆる同時座屈の場合に見られる現象である。例えば、双曲的へそのカタストロフィーは、補剛材を有する平板の座屈に見られ、この場合に平板は全体座屈と、平板無補強部での局部的座屈とを同時に起こす、ということがＴｈｏｍｐｓｏｎとＨｕｎｔの研究により示されている。これは、次のことを意味したものである。系の座屈点近傍における座屈挙動を表わすには本質的変数と呼ばれる、ある変位量を用いれば良いことがカタストロフィー理論により示されており、今の場合には、その本質的変数に対応するものが全体座屈と局部座屈をそれぞれ表現する二つの変位なのである。

系のカタストロフィーが双曲的へそのカタストロフィーである場合、全体座屈と局部座屈を表わす変位、すなわち本質的変数をそれぞれv_1とv_2とすれば、系の力学的特徴を表わすポテンシャルAは、次の様な形で与えられる。

$$A=v_1^3+\mu v_1 v_2^2+a(v_1^2+v_2^2)+bv_1+cv_2 \qquad (\mu>0) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

尚、式（１）においてａ、ｂ、ｃは荷重パラメーターと何らかの初期不整より成るコントロールパラメーターと呼ばれるものであり、μは各系に固有な正の定数である。実際には、ａを荷重パラメーター、ｂとｃをv_1とv_2方向に関する初期不整量に対応させることができ、この三つをコントロールパラメーターに選べば任意の初期不整により得られるポテンシャルの「開折」と同値なものを得ることができる。すなわち、荷重パラメーターと本質的変数v_1、v_2に対応する初期不整をコントロールパラメーターとして用いた時のポテシャルAは、総ての初期不整の影響を受けた場合のポテンシャルの特徴を捕えていると思われる。従って、系の特徴を知るためには（１）で示された関数Aがもつ力学的特徴を調べれば十分である。[2)]

又、一般にポテンシャルが平衡点において極小であるとき、系は安定であり、極大のとき不安定なわけであるが、関数Aの極大と極小との関係は、単にAの符号を換えれば逆にすることができるものであるので、ここでは特にその違いにはこだわらないことにする。

3．平衡径路の特徴

系のポテンシャルが（１）の式で与えられている時、（ｂ，ｃ）のある組み合わせの下での平衡径路（v_1，v_2，ａ）は次の式より得ることができる。

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial v_1}&=3v_1^2+\mu v_2^2+2av_1+b=0\\ \frac{\partial A}{\partial v_2}&=2\mu v_1 v_2+2av_2+c=0\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

平衡径路は（2）で与えられる平衡空間（v_1, v_2, a, b, c）から（v_1, v_2, a）への（b, c）の組み合わせがconstなスライスの射影として得ることができる。従って、平衡径路は、あるパラメーター（b, c）の下での（v_1, v_2, a）空間内の二種類の曲面、すなわち$\frac{\partial A}{\partial v_1}=0$と$\frac{\partial A}{\partial v_2}=0$の交線として捕えることができる。

まず、完全系（b, c）=（0, 0）の場合における平衡径路を求めると（2）より、径路の形態は次式の様に何本かの直線で与えられ、それらは総て原点で交わることがわかる。又、分岐の形態は$\mu=\frac{3}{2}$を境にして異なったものとなる。

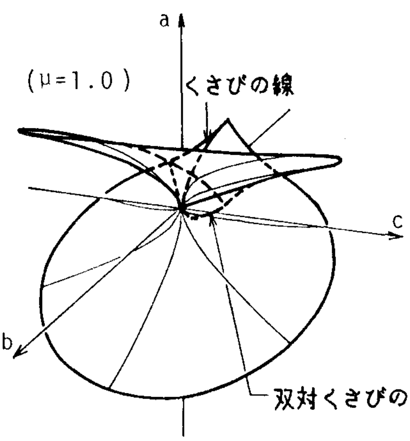
$\mu<\frac{3}{2}$のとき　$(v_1, v_2, a)=(0, 0, a), (v_1, 0, -\frac{3}{2}v_1)$ ・・・・・・・・・（3）

$\mu>\frac{3}{2}$のとき　$\left.\begin{array}{l}(v_1, v_2, a)=(0, 0, a), (v_1, 0, -\frac{3}{2}v_1), \\ (v_1, \pm\sqrt{(2\mu-3)/\mu}\cdot v_1, -\mu v_1)\end{array}\right\}$ ・・・・・・・・・（4）

（3）、（4）の両式で（v_1, v_2, a）=（0, 0, a）で与えられているものは、自明な解、すなわち基本径路を示したものであり、その他の径路は、同一の分岐点（原点）より枝分かれする分岐径路を示したものである。

又、初期不整が何らかのゼロでない値をとる時の平衡径路の形態も、$\mu=\frac{3}{2}$を境にして異なったものとなる。$\mu<\frac{3}{2}$の場合、いかなる初期不整（b, c）の下においても、系は荷重パラメーターaの変化に伴っていつか必ず座屈を生ずる。従って、この場合座屈点を持たない平衡径路は存在しない。一方、$\mu>\frac{3}{2}$の場合、b＜0のある範囲に初期不整（b, c）がある時、系はいかなる荷重パラメーターaの下においても座屈を生じず、この時の平衡径路には座屈点が存在しない。

尚、いずれの場合においても、cがゼロでない値をとることによって平衡径路上に分岐座屈点は無くなる。以上の詳細な点については当日発表の予定である。



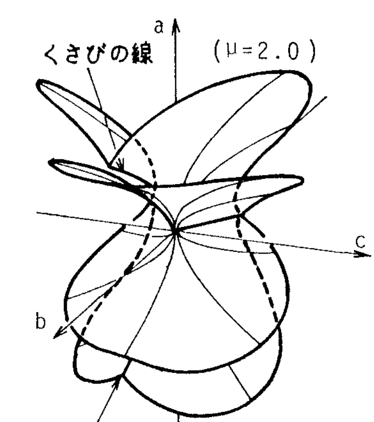
図－1　$\mu<\frac{3}{2}$での分岐集合

4．分岐集合の特徴

ある初期不整（b, c）の下での平衡径路が座屈を起こす時の荷重パラメーターaをb, cと共にコントロール空間（a, b, c）の中に表わして得られるものを分岐集合という。分岐集合は、

$$\{(3+\mu)v_1+2a\}^2=(2\mu v_2)^2+(\mu-3)^2v_1^2 \quad \cdots\cdots(5)$$

と式（2）よりv_1、v_2を消去して得られる（a, b, c）の空間内の曲面である。この曲面を$\mu<\frac{3}{2}$、$\mu>\frac{3}{2}$の場合について示すと図－1、図－2の様である。$\mu<\frac{3}{2}$の時、（b, c）がどこにあっても、そこで分岐集合に交わるようなaが必ず存在するので、径路はaの変化と共にいつか座屈を起こす。一方、$\mu>\frac{3}{2}$の時、b＜0の空間に分岐集合の存在しない部分があるので、この範囲内に（b, c）がある場合、径路はaの変化によらず座屈を生じない。いずれの場合においても、くさびの線上で座屈を生ずる時には分岐座屈が起こる。又、これらは3で述べたことに一致する。



図－2　$\mu>\frac{3}{2}$での分岐集合

〈参考文献〉　1）　丹羽、渡辺、中川：2自由度系のカタストロフィーと初期不整に対する鋭敏性について，土木学会論文報告集第307号，昭和56年3月．　2）　ポストン、スチュワート共著，野口、伊藤、戸川共訳：カタストロフィー理論とその応用，サイエンス社，1980．　3）野口　：カタストロフィー，サイエンス社，1977．