Ⅲ－17　半無限領域における集水暗きょへの浸透流の数値計算について

株式会社　構造計画研究所　正会員　○　林　　保志
藤岡　　徹

1　はじめに

半無限領域における浸透流問題を有限要素法で解く場合、半無限領域を適当な大きさの有限領域に置き換えてモデル化するのが普通である。しかし、モデル（有限領域）の大きさを決定するための明確な規準はない。また、モデルの大きさにより得られる解が異なるという問題もある。筆者らは、境界法のひとつである代用電荷法（Charge Simulation Method：電荷重畳法とも呼ばれる。）を応用して、半無限領域を有限領域に置き換えることなく、そのままの形で考慮できるように工夫した。集水暗きょを例にとりあげ、以下、簡単に報告する。

2　基礎式

最初に、浸透流問題の基礎式を示し、つぎに代用電荷法について概説する。

定常２次元浸透流問題の支配方程式は次式で表わされる。

$$\nabla^2 \phi = 0 \tag{1}$$

ここに、ϕ：ポテンシャル，∇^2：ラプラシアン

境界条件は次式で示される。

$$\left.\begin{aligned} \phi &= \bar{\phi} \quad ; \quad \text{on} \quad \Gamma_1 \\ q &= \bar{q} \quad ; \quad \text{on} \quad \Gamma_2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ここに、$q = \partial\phi/\partial n$ で、nは境界Γ上の外向き法線方向を表わす。また、上付きバーは規定された量を意味する。

3　代用電荷法

3.1　代用電荷法の概要

代用電荷法は、その名が示すように、従来、電気工学分野において用いられてきた数値計算手法である。電気工学に関係しない人にはなじみがないと思われるので、その概要を記しておく。

代用電荷法は、1969年H. Steinbigler[1]が高電圧装置の電界計算に用いたのが最初で、70年代に入って日本と西ドイツで主として応用に関した論文[2]が発表された。

図．1に示すように領域外の適当な位置に代用電荷（単位集中負荷）を配置して、それぞれの代用電荷に対する電位関数（ポテンシャル関数）の重ね合わせとして一般解ϕ（x，y）を表わすのが代用電荷法の基本的な考え方である。ϕ（x，y）は次式で表わされる。

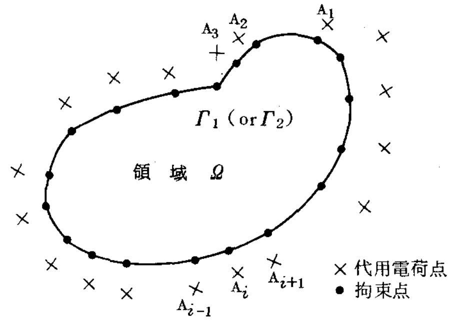
$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} Q_i \cdot G(x, y; x_i, y_i) \tag{3}$$

ここに、Q_i は重みあるいは電荷量と呼ばれる未定係数である。$G(x, y; x_i, y_i)$は点(x_i, y_i)にある単位電荷による点（x，y）の電位関数（すなわちグリーン関数）であり、通常は次式で示されるものを使う。

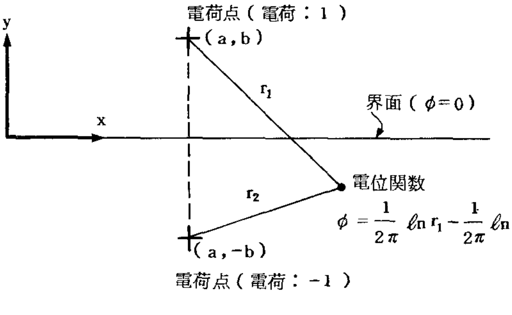
$$G(x, y; x_i, y_i) = (1/2\pi)\,\ell n\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2} \tag{4}$$

3.2　半無限領域の代用電荷法

半無限領域に代用電荷法を応用するために、次式で示されるグリーン関数を考える。



図．1　代用電荷法



図．2　鏡像の方法

$$G(x\ y;x_i,y_i)=(1/2\pi)\ell n\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}-(1/2\pi)\ell n\sqrt{(x-x_i)^2+(y+y_i)^2} \tag{5}$$

式(5)は、ポテンシャル論でよく用いられる鏡像の方法[3]を用いて求めたものである。すなわち、図．2に示すように代用電荷点をx軸に関して対称に2点考え、それぞれの代用電荷の符号を逆にした電位関数の和をとったものをグリーン関数とする。このグリーン関数は、x軸に関して自動的に逆対称条件(x軸上で$\phi=0$の境界条件)を満足する。

x軸上の境界条件が$\phi=\phi_0$ ($\fallingdotseq 0$)の場合には、ϕを次のように考えて、境界条件を変えてϕ_1について解けばよい。

$$\phi=\phi_1+\phi_0 \tag{6}$$

4. 解析例

式(5)をグリーン関数とした場合の代用電荷法の半無限領域への適用性を検討するために、図．3に示すような集水暗きょへの浸透流問題を解析した。境界条件は、地表面，暗きょ周壁ともに圧力水頭を2.0 mとした。

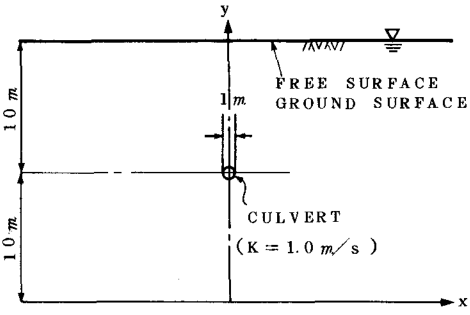
解析は、式(4)と式(5)をそれぞれグリーン関数として用いた場合の2ケース行った。図・4にモデル図を示す。

図．5に計算結果のうち、y軸上の暗きょ上部のポテンシャル値を示す。同図の横軸のrは、暗きょ中心点からの距離である。また、比較のために、上田ら[4]により求められた半無限領域における集水暗きょへの浸透流の解析解から計算した値も併記した。

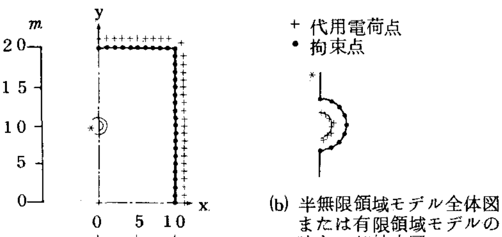
図・5を見ると明らかなように、式(5)をグリーン関数として用いた計算値の方が解析解と良く一致している。したがって、半無限領域の浸透流問題を取り扱う場合は、式(5)をグリーン関数として用いた方が、モデル化の簡便さ、数値計算上の精度ともに優れているといえる。

5. おわりに

本報告では解析例として円形暗きょを取り扱ったが、代用電荷法では円形以外の形状も容易にモデル化できるし、また、自由表面を有する暗きょの場合でも、暗きょ周壁の境界条件を簡単に考慮できることを付記しておく。



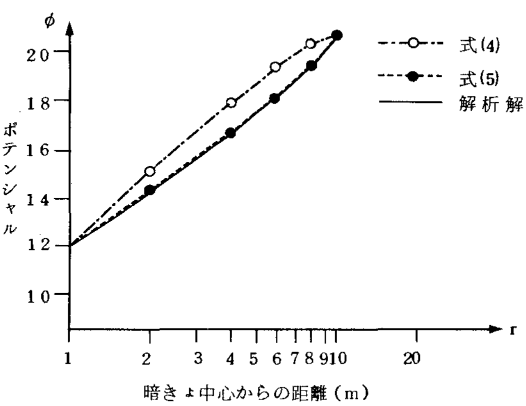
図．3　集水暗きょ



(a) 有限領域モデル全体図

(b) 半無限領域モデル全体図または有限領域モデルの暗きょ部拡大図

図．4　モデル図



図．5　計算結果

参考文献

(1) H. Steinbigler : Aufagsfeldstarken and Aurrutzurgs faktoren rotations-symmetrischer Elektrodenanor-dnungen, Dissertation T. H. Munchen (1969)

(2) たとえば、村島定行，久原秀夫：リーマン面上のグリーン関数を利用した代用電荷法，昭和54年度情報処理学会第20回全国大会

(3) たとえば、今井　功：等角写像とその応用，岩波書店，1979年

(4) 上田年比古，杉尾　哲：被圧水で満たされた円形暗きょの取水量について、土木学会論文報告集，第194号，PP91～101，1971